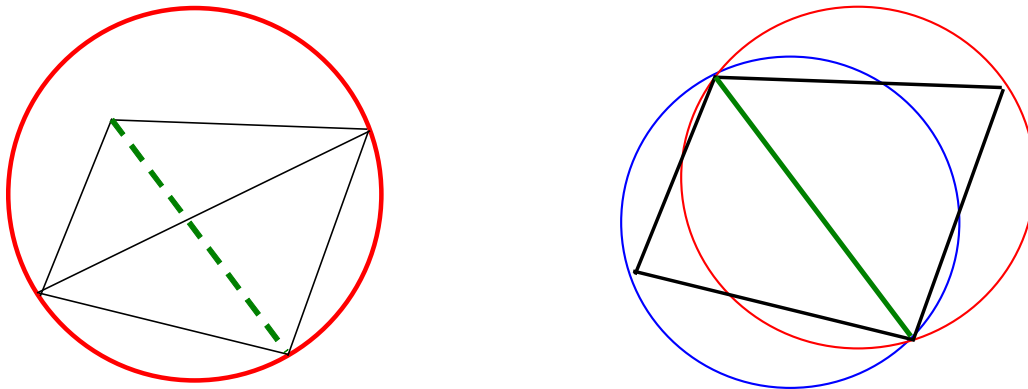


Uwaga na temat lokalnego poprawiania jakości siatki – *swapping diagonals*.

Możliwe jest lokalne polepszenie jakości siatki dyskretyzacji.

Wykorzystuje się w tym celu następujące fakty:

- Triangulacja Delaunaya T_D charakteryzuje się tym, że w żadnym z okręgów opisanych na trójkącie z T_D nie zawierają się inne wierzchołki.
- Dla danych czterech wierzchołków wypukłego czworokąta istnieją dwa możliwe podziały na trójkąty: jeden z tych podziałów to triangulacja Delaunaya T_D . Przejście pomiędzy dwoma triangulacjami uzyskuje się poprzez zmianę przekątnej w czworokącie.
- Triangulacja Delaunaya maksymalizuje wartość minimalnego kąta w trójkącie.

**Ogólne symetryczne zagadnienie eliptyczne**

Rozważamy zagadnienie:

$$-\nabla \cdot (K \nabla u) + a_0 u = f \quad \text{w } \Omega$$

z warunkami brzegowymi

$$u = g \quad \text{na } \Gamma_1, \quad -K \frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{na } \Gamma_2.$$

Równanie to opisuje na przykład rozkład temperatury w pręcie, przy założeniu, że następują straty ciepła w związku z konwekcją oraz promieniowaniem. Jest to opisywane za pomocą członu $a_0 u$.

Sformułowanie wariacyjne dla tego zagadnienia jest następujące:

Znaleźć $u \in H_{g,\Gamma_1}^1(\Omega)$ taką, że $\forall \omega \in H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega)$ zachodzi:

$$\int_{\Omega} (K \nabla u)^T \cdot \nabla \omega \, d\underline{x} + \int_{\Omega} a_0 u \omega \, d\underline{x} = \int_{\Omega} f \omega \, d\underline{x} - \int_{\Gamma_2} h \omega \, d\gamma$$

W celu wyznaczenia rozwiązania przybliżonego tego równania wykonuje się te same kroki co dla przypadku równania Poissona:

1) rozwiązania przybliżonego poszukuje się w przestrzeni skończonej wymiarowej V_h ,

$V_h \in H_{g,\Gamma_1}^1(\Omega)$. Przestrzeń V_h jest konstruowana w oparciu o dyskretyzację obszaru obliczeniowego Ω . Rozwiązuje się następujące zagadnienie:

Znaleźć $u_h \in H_h^1(\Omega_h)$ taką, że $\forall \omega \in H_h^1(\Omega_h)$ zachodzi

$$(*) \quad \int_{\Omega} (K \nabla u_h)^T \cdot \nabla \omega_h \, d\underline{x} + \int_{\Omega} a_0 u_h \omega_h \, d\underline{x} = \int_{\Omega} f \omega_h \, d\underline{x} - \int_{\Gamma_2} h \omega_h \, d\gamma.$$

- 2) Przestrzeń V_h jest przestrzenią skończone wymiarową, a zatem posiada bazę. Dla ustalenia uwagi zakładamy, że są to elementy P1 (funkcje ciągłe, kawałkami liniowe, nazywane też funkcjami ‘kapeluszkowymi’.)
- 3) Każdą funkcję należącą do V_h można przedstawić jako kombinację liniową funkcji bazowych i współczynników; w szczególności rozwiązanie przybliżone poszukuje się w postaci:

$$u_h = \sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i \varphi_i,$$

gdzie n_i jest równe liczbie wewnętrznych wierzchołków oraz wierzchołków należących do Γ_2 .

- 4) Podstawia się tę reprezentację do równania (*):

$$\int_{\Omega} (K \nabla \left(\sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i \varphi_i \right))^T \cdot \nabla \omega_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 \left(\sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i \varphi_i \right) \omega_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \omega_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_2} h \omega_h \, d\gamma$$

- 5) Zgodnie z metodą Galerkiną wymaga się aby równanie to było spełnione dla każdej funkcji bazowej φ_j :

$$\int_{\Omega} (K \nabla \left(\sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i \varphi_i \right))^T \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 \left(\sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i \varphi_i \right) \varphi_j \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \varphi_j \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_2} h \varphi_j \, d\gamma,$$

$$j = 1, \dots, n_i$$

- 6) Przekształcając otrzymuje się:

$$\sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i \left(\int_{\Omega} (K \nabla \varphi_i)^T \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 \varphi_i \varphi_j \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\Omega} f \varphi_j \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_2} h \varphi_j \, d\gamma, \quad j = 1, \dots, n_i$$

- 7) Jest to układ równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{\alpha} = \mathbf{B}$, w którym elementy macierzy mają wartość $A_{ij} = \int_{\Omega} K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \int_{\Omega} a_0 \varphi_i \varphi_j$, zaś elementy wektora prawej strony wynoszą $B_j = \int_{\Omega} f \varphi_j$ plus składniki odpowiedzialne za spełnienie warunków brzegowych.

Przykład 1D

$$-\frac{d}{dx} \left(K \frac{du}{dx} \right) + u = 0 \quad w (0,1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

Dla $K=1$ rozwiązanie dokładne wynosi:

$$u(x) = \frac{e}{e^2 - 1} (e^x - e^{-x})$$

Słabe sformułowanie:

Znaleźć $u \in V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(0) = 0, v(1) = 1\}$ taką, że
 $\forall \omega \in V_0 = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v(0) = 0 \text{ oraz } v(1) = 0\}$ zachodzi

$$\int_0^1 K \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} dx + \int_0^1 u \omega dx = 0.$$

Obliczenia wykorzystują dyskretyzację otrzymaną w wyniku podziału odcinka $[0,1]$ na cztery podprzedziały. Rozwiązanie przybliżone jest wyrażone w postaci kombinacji liniowej:

$$u_h = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \varphi_i + \alpha_4 \varphi_4.$$

Drugi człon tego wyrażenia odpowiada za spełnienie różnego od zera warunku brzegowego; w rozważanym przypadku jest tylko jeden węzeł brzegowy, w którym funkcja przyjmuje wartość różną od zera i $\alpha_4 = 1$.

Po podstawieniu reprezentacji u_h do słabego sformułowania i dokonaniu prostych przekształceń otrzymuje się układ trzech równań liniowych $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}$:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left(\int_0^1 K \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx + \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx \right) = -\alpha_4 \left(\int_0^1 K \frac{d\varphi_4}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx + \int_0^1 \varphi_4 \varphi_j dx \right)$$

Zauważmy, że prawa strona równania jest różna od zera tylko dla $j=3$ (węzeł sąsiadujący z węzłem brzegowym). Jest to zgodne z wcześniejszym stwierdzeniem, że niezerowy warunek Dirichleta jest wymuszany poprzez modyfikację wektora prawej strony, przy czym modyfikowane są tylko te elementy, które odpowiadają węzłom sąsiadującym z węzłami brzegowymi z niezerowym warunkiem Dirichleta.

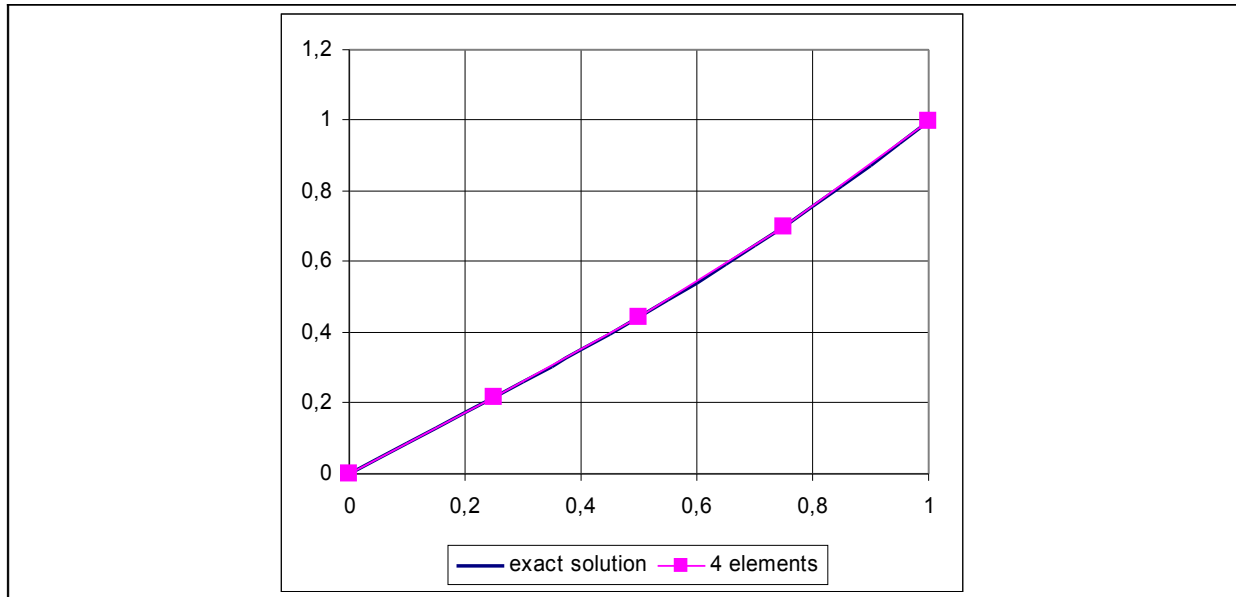
Elementy macierzy wyrażają się wzorem:

$$A_{ij} = \int_0^1 K \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} + \int_0^1 \varphi_i \varphi_j = \begin{cases} K \cdot \frac{2}{h} + \frac{2}{3} \mathbf{h}, & i = j \\ -K \frac{1}{h} + \frac{1}{6} \mathbf{h}, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| > 1 \end{cases}$$

Dla $K=1$ otrzymuje się:

h=	0,25				
8,166667	-3,958333	0		0	
-3,958333	8,166667	-3,958333		0	
0	-3,958333	8,166667		3,958333	

Macierz o składnikach $\int_{\Omega} K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$ nazywa się **macierzą sztywności**, zaś macierz o elementach $\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j$ nazywa się **macierzą masy**. Każda z tych macierzy jest **macierzą symetryczną**. Są to ponadto **macierze rzadkie** o tej samej strukturze elementów niezerowych.



Macierz i wektor prawej strony dla dyskretyzacji złożonej z 10 elementów są następujące:

T										
8,166667	-3,958333	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3,958333	8,166667	-3,958333	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-3,958333	8,166667	-3,958333	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-3,958333	8,166667	-3,958333	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-3,958333	8,166667	-3,958333	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-3,958333	8,166667	-3,958333	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-3,958333	8,166667	-3,958333	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-3,958333	8,166667	-3,958333	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-3,958333	8,166667	-3,958333	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-3,958333	8,166667	3,958333

Uwaga na temat tensorowego współczynnika K .

Występujący w równaniu współczynnik K w ogólnym przypadku może zależeć od położenia; ponadto, w przypadku ośrodków anizotropowych, może być wyrażony za pomocą macierzy.

Zmienność przestrzenna

Mimo, że współczynnik może być zależny od położenia w sposób 'ciągły': $K = K(x, y, z)$, na poziomie zagadnienia dyskretnego przyjmuje się, że współczynnik jest **stały na elemencie**. Konieczność reprezentowania niejednorodnych ośrodków za pomocą jednego (choć być może tensorowego) współczynnika pociągnęła za sobą rozwój **metod skalowania**. Jedną z metod skalowania jest metoda **homogenizacji**.

Tensorowy współczynnik K

W przeciwieństwie do metody różnic skończonych, metoda elementu skończonego pozwala uwzględniać anizotropowy charakter ośrodka w bardzo naturalny sposób, wpływający bezpośrednio ze sformułowań metody.

Dla uproszczenia zapisu rozważać będziemy przypadek dwuwymiarowy; w przypadku trójwymiarowych wszystko przebiega analogicznie.

Założmy, że współczynnik K jest reprezentowany za pomocą macierzy symetrycznej, stałej w obrębie każdego elementu:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu do sformułowania

$$\sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i \left(\int_{\Omega} (K \nabla \varphi_i)^T \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 \varphi_i \varphi_j \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\Omega} f \varphi_j \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_2} h \varphi_j \, d\gamma, \quad j = 1, \dots, n_i$$

otrzymuje się (rozpisana zostanie tylko całka zawierająca K):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (K \nabla \varphi_i)^T \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \end{bmatrix} d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} \left[k_{11} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \quad k_{21} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \end{bmatrix} d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} \left[k_{11} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + k_{21} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + k_{22} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] d\mathbf{x} \end{aligned}$$

W szczególności gdy $K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}$ otrzymuje się:

$$\dots \int_{\Omega} \left[k_{11} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] d\mathbf{x}$$

Tensor, reprezentowany za pomocą macierzy K , najczęściej jest symetryczny. Gdyby tak nie było, macierz układu równań otrzymanego w wyniku przeprowadzenia procedury metody elementu skończonego, również **nie** byłaby symetryczna.

Niesymetryczne eliptyczne równanie różniczkowe cząstkowe

Przykładem niesymetrycznego równania różniczkowego cząstkowego jest równanie adwekcji-dyfuzji postaci:

$$(*) \quad -\nabla \cdot (K \nabla u) + \underline{\beta} \cdot \nabla u + a_0 u = f \quad \text{w } \Omega$$

z (przykładowym) warunkiem brzegowym

$$K \frac{\partial u}{\partial n} + a_1 u = g \quad \text{na } \Gamma.$$

K – współczynnik dyfuzji, w ogólnym przypadku reprezentowany za pomocą macierzy;

$$\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in (L^\infty(\Omega))^3$$

$a_0 \in L^\infty(\Omega)$ - skalarna funkcja

$$f \in L^2(\Omega)$$

a_1, g - określone na Γ ; $a_1 \in L^\infty(\Gamma)$, $g \in L^2(\Gamma)$.

Przyczyny braku symetrii:

W przeciwieństwie do wcześniej rozważanych zagadnień zakładamy, że macierz K może być niesymetryczna. Np. niektóre techniki skalujące dają w wyniku współczynniki efektywne opisane poprzez macierze niesymetryczne.

Człon adwekcyjny jest zawsze niesymetryczny:

$$\underline{\beta} \cdot \nabla u = \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_3 \frac{\partial u}{\partial z}.$$

$\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ jest prędkością konwekcji.

Funkcja u może reprezentować na przykład temperaturę płynu. Jeśli płyn przemieszcza się w ośrodku porowatym to K oznacza wtedy (tensorowy) współczynnik dyfuzji. Człon źródłowy f modeluje źródła ciepła w Ω , podobnie jak g reprezentuje źródła ciepła na Γ , z możliwymi stratami z powodu promieniowania jeśli $a_1 \neq 0$.

Uwaga o warunku brzegowym

Zauważmy, że w równaniu występuje **dane** pole prędkości. Warunek brzegowy może zostać zdefiniowany w zależności od tego pola:

$$u = g_- \text{ na } \Gamma_-$$

$$u = g_+ \text{ (lub } \partial_n u = g_+) \text{ na } \Gamma_+.$$

Γ_- oznacza brzeg wlotowy (ang. *inflow*), zaś Γ_+ jest brzegiem wylotowym (ang. *outflow*):

$$\Gamma_- = \{x \in \Gamma : \underline{\beta}(x) \cdot n(x) < 0\}$$

$$\Gamma_+ = \{x \in \Gamma : \underline{\beta}(x) \cdot n(x) \geq 0\}.$$

Sformułowanie wariacyjne

Znaleźć $u \in H^1(\Omega)$ taką, że $\forall \omega \in H^1(\Omega)$ zachodzi:

$$(**) \quad \int_{\Omega} (K \nabla u)^T \cdot \nabla \omega \, d\underline{x} + \int_{\Omega} (\underline{\beta} \cdot \nabla u) \omega \, d\underline{x} + \int_{\Omega} a_0 u \omega \, d\underline{x} + \int_{\Gamma} a_1 u \omega \, d\gamma = \int_{\Omega} f \omega \, d\underline{x} - \int_{\Gamma} g \omega \, d\gamma$$

Zachodzi:

Jeśli $u \in H^2(\Omega)$ to wtedy u jest rozwiązaniem zagadnienia (*) $\Leftrightarrow u$ jest rozwiązaniem zagadnienia wariacyjnego (**).

Ze względu na brak symetrii w tym przypadku nie istnieje równoważne sformułowanie w postaci zagadnienia minimalizacji funkcjonału.

W celu wyznaczenia rozwiązania przybliżonego wykonuje się kolejno kroki dobrze znanej procedury:

rozwiązania przybliżonego poszukuje się w przestrzeni skończonej wymiarowej V_h , $V_h \in H_{g,\Gamma}^1(\Omega)$. Przestrzeń V_h jest konstruowana w oparciu o dyskretyzację obszaru obliczeniowego Ω . Rozwiązuje się następujące zagadnienie:

Znaleźć $u_h \in H_h^1(\Omega)$ taką, że $\forall \omega_h \in H_h^1(\Omega)$ zachodzi:

$$\int_{\Omega} (K \nabla u_h)^T \cdot \nabla \omega_h \, d\underline{x} + \int_{\Omega} (\underline{\beta} \cdot \nabla u_h) \omega_h \, d\underline{x} + \int_{\Omega} a_0 u_h \omega_h \, d\underline{x} + \int_{\Gamma} a_1 u_h \omega_h \, d\gamma = \int_{\Omega} f \omega_h \, d\underline{x} - \int_{\Gamma} g \omega_h \, d\gamma$$

Przestrzeń V_h jest przestrzenią skończonej wymiarową, a zatem posiada bazę. Dla ustalenia uwagi zakładamy, że są to elementy P1 (funkcje ciągłe, kawałkami liniowe, nazywane też funkcjami ‘kapeluszkowymi’.)

Każdą funkcję należącą do V_h można przedstawić jako kombinację liniową funkcji bazowych i współczynników; w szczególności rozwiązania przybliżonego poszukuje się w postaci:

$$u_h = \sum_{i=1}^{n_{tot}} \alpha_i \varphi_i,$$

gdzie n_{tot} jest równe liczbie wszystkich wierzchołków

Podstawia się tę reprezentację do równania (*) i wymaga się, aby było spełnione dla każdej funkcji bazowej φ_j .

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$\sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i \left(\int_{\Omega} (K \nabla \varphi_i)^T \cdot \nabla \varphi_j \, d\underline{x} + \int_{\Omega} (\underline{\beta} \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_j \, d\underline{x} + \int_{\Omega} a_0 \varphi_i \varphi_j \, d\underline{x} + \int_{\Gamma} a_1 \varphi_i \varphi_j \, d\gamma \right) =$$

$$= \int_{\Omega} f \varphi_j \, d\underline{x} - \int_{\Gamma} g \varphi_j \, d\gamma \quad j = 1, \dots, n_i$$

Jest to układ równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{B}$, w którym elementy macierzy mają wartość $A_{ij} = \int_{\Omega} K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \int_{\Omega} (\underline{\beta} \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_j + \int_{\Omega} a_0 \varphi_i \varphi_j$ plus ewentualnie składnik odpowiedzialny za spełnienie mieszanego warunku brzegowego, zaś elementy wektora prawej strony wynoszą $B_j = \int_{\Omega} f \varphi_j$ plus składniki odpowiedzialne za spełnienie warunków brzegowych.

Macierz A nie jest symetryczna!!!

Oznacza to, że klasa metod, które mogą być wykorzystane do rozwiązania układu równań liniowych, znacznie się zawęża, w porównaniu z przypadkiem zagadnień symetrycznych.

Konwekcja vs. dyfuzja

Jakościowa natura rozważanego zagadnienia zależy od wzajemnej relacji między współczynnikiem dyfuzji i prędkością konwekcji (adwekcji).

Gdy $K/|\beta|$ małe: w równaniu dominuje konwekcja, równanie nabiera charakteru równania hiperbolicznego.

W miarę jak wartość $K/|\beta|$ wzrasta – równanie zmienia swój charakter z hiperbolicznego na eliptyczny.

Dla równań o dominującej dyfuzji obowiązuje to, co dotąd powiedziano w odniesieniu do równań eliptycznych, bowiem czynnik konwekcyjny jest zdominowany przez człon dyfuzyjny.

Można byłoby rozważać tzw. zagadnienie zredukowane, czyli przypadek skrajny z $K=0$.

$$\underline{\beta} \cdot \nabla u + a_0 u = f \quad \text{w } \Omega$$

$$u = g_- \quad \text{na } \Gamma_-$$

(Uwaga, warunek brzegowy jest zadany tylko na wlocie).

Jest to zagadnienie hiperboliczne, którego nie będziemy teraz omawiać, warto jednak wspomnieć, że:

brak dyfuzji sprawia, że informacja jest propagowana ‘ostro’ wzdłuż linii prądu od brzegu wlotowego do wylotu. W szczególności, jeśli w pewnym punkcie \underline{x} należącym do brzegu Γ_- występuje nieciągłość danych wejściowych, to rozwiązanie będzie nieciągłe wzdłuż całej linii prądu wychodzącej z \underline{x} .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{w } \Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$\underline{\beta} = (1,0)$$

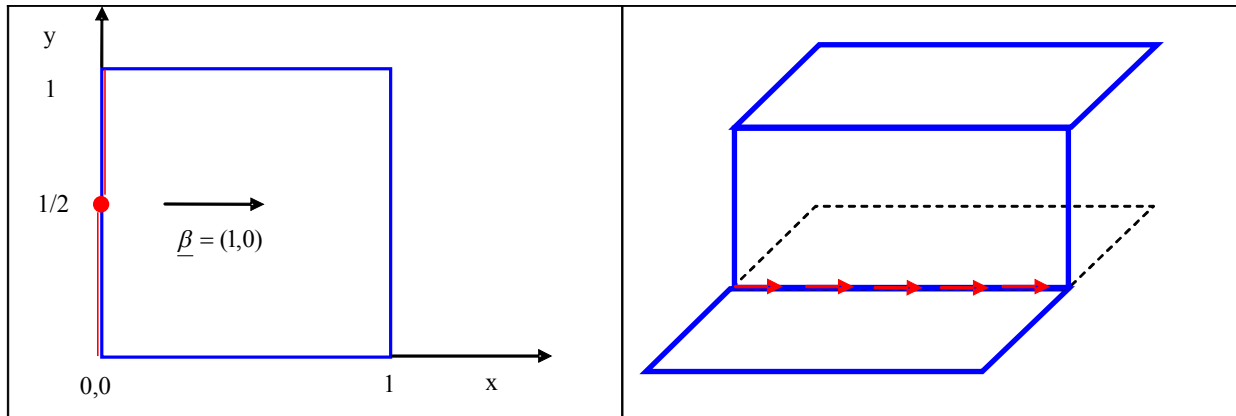
Warunek brzegowy:

$$u(0,y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq y < 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < 1/2, \quad 0 < x < 1 \\ 1, & 1/2 \leq y < 1, \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

posiada nieciągłość wzdłuż linii prądu $(x, y) = (x, 1/2)$.



Trudności pojawiają się również w przypadku gdy $K/|\beta| \neq 0$ ale jest małe. Obecność dyfuzji sprawia, że rozwiązanie jest ciągłe, zaś ‘nieciągłość’ jest w wyniku jej działania ‘rozmywana’.

Jeśli na brzegu wylotowym Γ_+ założy się warunek Dirichleta, to wtedy najczęściej rozwiązanie zagadnienia posiada warstwę brzegową (ang. *boundary layer*) w sąsiedztwie Γ_+ o szerokości $O(K)$ ze względu na szybką zmianę rozwiązania wymuszoną przez działanie warunku brzegowego na Γ_+ .

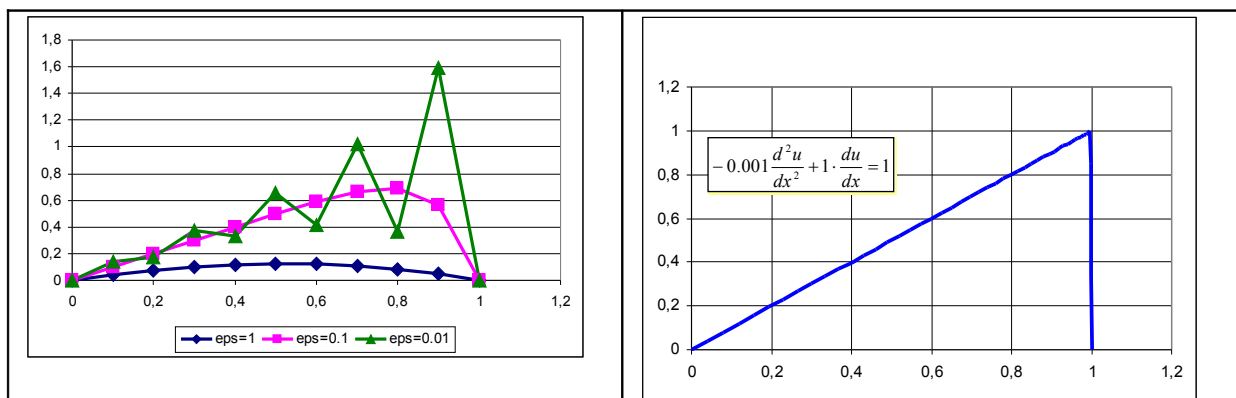
Rozważmy równanie:

$$-\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 1 \quad w(0, 1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Jest to równanie eliptyczne, zawierające człon adwekcyjny o ogólnej postaci $\underline{\beta} \cdot \nabla u$; w rozważanym przykładzie $\beta = 1$.

Okazuje się, że dla $\varepsilon \ll \beta$ (czyli u nas $\varepsilon \ll 1$) w rozwiązaniu przybliżonym wyznaczonym metodą elementu skończonego pojawiają się oscylacje, podczas gdy rozwiązanie dokładne ma kształt przedstawiony na rysunku obok.



Im mniejsza jest wartość współczynnika dyfuzji ε , tym mniejsza jest warstwa graniczna, której szerokość ma wartość rzędu $\varepsilon / \beta = \varepsilon$.

Zauważmy przyczynę kłopotu: kiedy ε staje się małe, równanie przykładowe ‘prawie’ degeneruje się do równania pierwszego rzędu, dla którego warunek Dirichleta nałożony w

końcowym punkcie przedziału jest nieadekwatny. Efekt jest taki, że numeryczne rozwiązanie jest 'zanieczyszczone' warunkiem brzegowym w $x=1$, co więcej to zanieczyszczenie propaguje się w głąb obszaru.

Uwagi:

Jeśli na brzegu $x=1$ zadany jest warunek brzegowy drugiego rodzaju (Neumanna) postaci $\frac{du}{dx} = 0$ to oscylacje nie występują.

Można pokazać, że oscylacje pojawiają się gdy $\frac{\beta h}{\varepsilon} \geq 2$, gdzie h oznacza wielkość elementu.

Wielkość $\frac{\beta h}{\varepsilon}$ jest nazywana komórkową liczbą Reynoldsa.

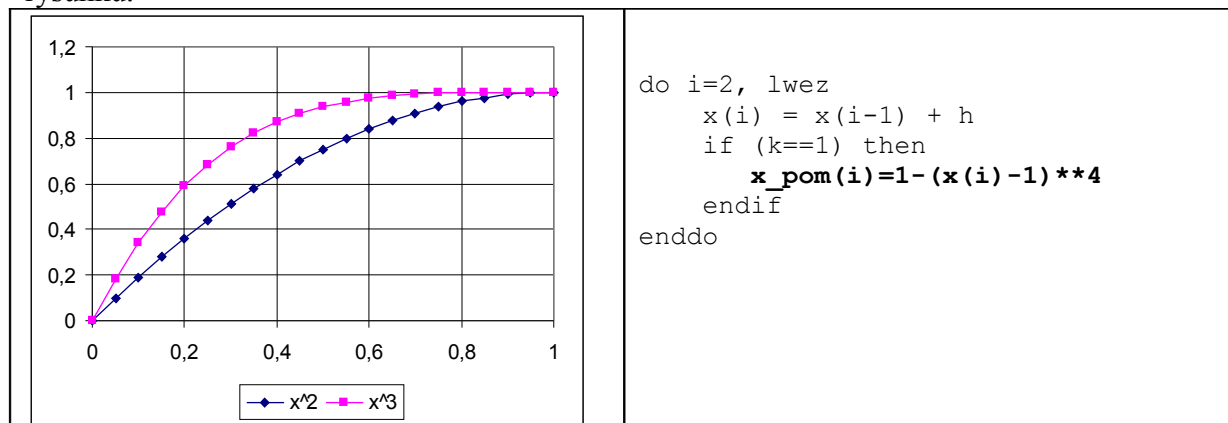
Walka z oscylacjami

- **Lokalne zagęszczenie dyskretyzacji w sąsiedztwie frontu.**

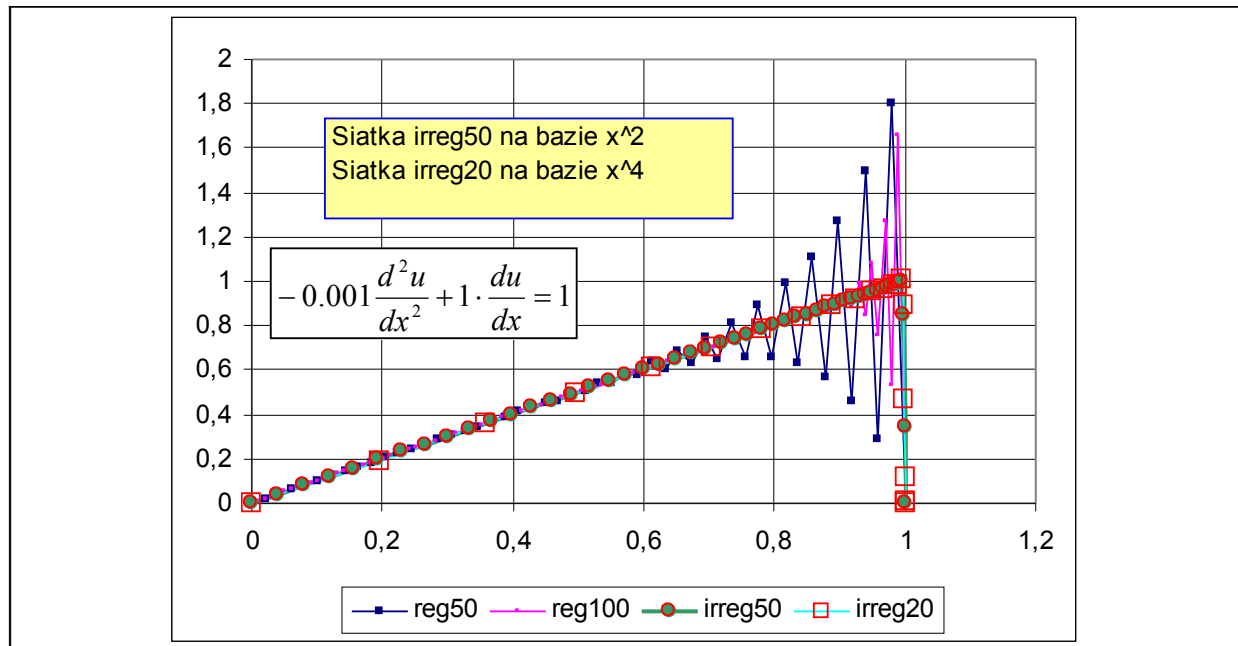
Skoro problemy wynikają z dużego skoku rozwiązania, należy się spodziewać, że zagęszczenie siatki w sąsiedztwie punktu $x=1$ powinno przynieść poprawę rozwiązania przybliżonego.

Na marginesie uwaga na temat siatki obliczeniowej.

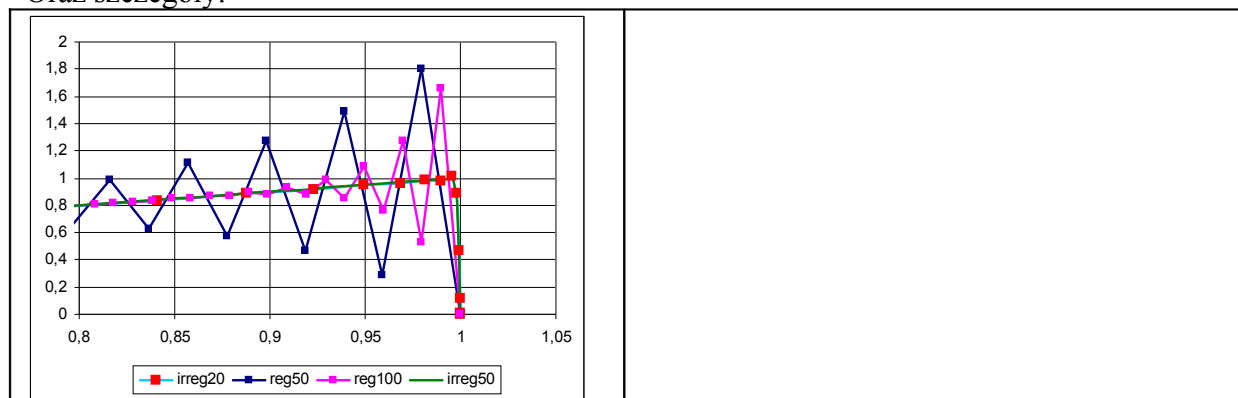
Nieregularna siatka została skonstruowana na bazie podziału równomiernego odcinka oraz funkcji kwadratowej lub czwartego stopnia według rozkładu punktów na osi y – tak jak na rysunku.



Wykorzystanie zmodyfikowanej dyskretyzacji przynosi widoczną poprawę:



Oraz szczegóły:



- **Metody typu ‘upwind’ – metoda Petrova-Galerkina**

Następny wykład...

Podsumowanie

Dyskretyzacja składnika adwekcyjnego $\underline{\beta} \cdot \nabla u$

- Jest przyczyną otrzymania niesymetrycznego układu równań;
- Powoduje mnóstwo kłopotów natury numerycznej. Z tym problemem spotkamy się ponownie omawiając zagadnienia związane z równaniami parabolicznymi.
- Zastosowanie standardowych metod (np. Galerkin) w przypadku gdy dominuje człon adwekcyjny powoduje występowanie нефизycznych oscylacji w sąsiedztwie frontów.
- Próby ich zwalczania najczęściej są przyczyną zbyt dużej, w porównaniu z fizyczną dyfuzji, w wyniku której następuje ‘rozmazywanie’ (ang. *smear*) ostrych frontów i nieciągłości rozwiązania.