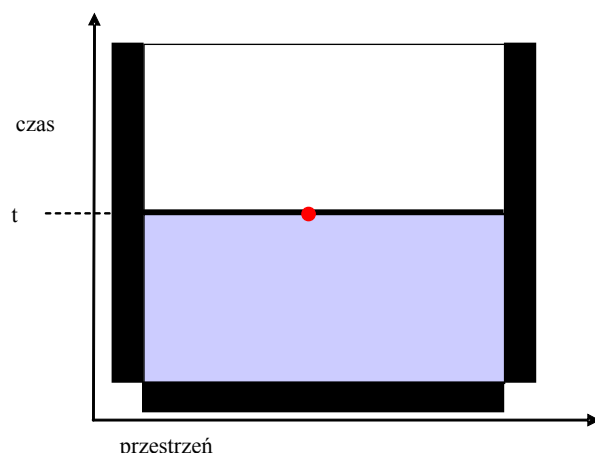


Metoda elementu skończonego dla zagadnień parabolicznych

W problemach związanych z modelowaniem istotne miejsce zajmują symulacje przebiegu różnych procesów w *funkcji czasu*, np. rozprzestrzenianie się zanieczyszczeń. Do opisu takich zagadnień bardzo często wykorzystuje się równania paraboliczne.

W równaniach tych wyróżnia się zmienną reprezentującą czas (najczęściej oznaczaną symbolem t) oraz zmienne przestrzenne.

Przypomnijmy też pojęcie obszaru zależności i obszaru wpływu, graficznie przedstawiane za pomocą następującego szkicu:



Rozwiązanie w chwili $t > t_0$ zależy od tego co zdarzyło się w przeszłości w całym obszarze oraz od tego co zachodzi w chwili t w całym obszarze. Z kolei rozwiązanie $P(t, \underline{x})$ w chwili t i w punkcie przestrzeni \underline{x} wpływa na to co się dzieje w całym w obszarze w chwili t oraz to, co się będzie działo w całym obszarze ‘w przyszłości’.

Wynika stąd, że czas spełnia szczególną rolę, zaś brak zależności rozwiązania zagadnienia dla wybranej chwili czasu t_i od chwil ‘późniejszych’ ($t > t_i$) sugeruje, że metody numerycznego rozwiązywania takich zagadnień powinny traktować czas w sposób szczególny.

Rozważamy zagadnienie:

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (K(x, y, z) \nabla u) = f, \text{ w } \Omega \times (0, T]$$

z warunkami brzegowymi (na przykład):

$$u = 0 \text{ w } \Gamma_1 \times (0, T], \quad K \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ w } \Gamma_2 \times (0, T]$$

oraz warunkiem początkowym:

$$u(\underline{x}, 0) = u^0(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega.$$

Dyskretyzacja przebiega w dwóch krokach:

- Przeprowadza się dyskretyzację w przestrzeni metodą elementu skończonego. W wyniku otrzymuje się *semi-dyskretny* odpowiednik zagadnienia (*).
- Zagadnienie *semi-dyskretny* jest zagadnieniem początkowym dla układu równań różniczkowych zwyczajnych. Aby otrzymać zagadnienie (w pełni) dyskretne, przeprowadza się z kolei dyskretyzację w czasie. Wykorzystuje się w tym celu schematy różnic skończonych; tu zostaną omówione metody Eulera oraz schemat Cranka-Nicholsona.

Krok 1: w stronę schematu semi-dyskretnego

Postępuje się zgodnie z metodą elementu skończonego:

Niech $V = H_0^1(\Omega)$. Równanie (*) dla ustalonego czasu t mnoży się przez $v \in V$, całkuje po Ω i stosuje twierdzenie Greena, otrzymując zagadnienie w postaci wariacyjnej:

Znaleźć $u \in V$, $t \in (0, T]$ taką, że $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ zachodzi:

$$u(x, 0) = u^0(x)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) K \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx$$

Rozwiązania poszukuje się w przestrzeni skończenie wymiarowej $V_h \subset V$, z bazą $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$.

Założmy, że jest baza funkcji ciągłych, liniowych na elementach.

Semi-dyskretny odpowiednik zagadnienia (*) zapisuje się:

Znaleźć $u_h \in V_h$, $t \in (0, T]$ taką, że $\forall v \in V_h(\Omega)$ zachodzi:

$$\int_{\Omega_h} \frac{\partial u_h(x, t)}{\partial t} v(x) dx + \int_{\Omega_h} \nabla u_h(x, t) K \nabla v(x) dx = \int_{\Omega_h} f(x, t) v(x) dx$$

$$\int_{\Omega_h} u_h(x, 0) v(x) dx = \int_{\Omega_h} u^0(x) v(x) dx$$

Zgodnie z procedurą stosowaną w rozwiązywaniu zagadnień eliptycznych, rozwiązanie u_h przedstawia się w postaci kombinacji liniowej funkcji bazowych:

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \varphi_i(x)$$

Różnicę stanowi fakt, że współczynniki kombinacji α_i zależą od czasu, $\alpha_i = \alpha_i(t)$.

Po podstawieniu tej reprezentacji do słabego sformułowania, oraz zastępowaniu kolejno funkcji $v \in V_h(\Omega)$ funkcjami bazowymi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ otrzymuje się:

$$\int_{\Omega_h} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \varphi_i(x) \right)}{\partial t} \varphi_j(x) dx + \int_{\Omega_h} \nabla \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \varphi_i(x) \right) K \nabla \varphi_j(x) dx = \int_{\Omega_h} f(x, t) \varphi_j(x) dx$$

$$\int_{\Omega_h} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(0) \varphi_i(x) \right) \varphi_j(x) dx = \int_{\Omega_h} u^0(x) \varphi_j(x) dx$$

$j = 1, \dots, n$

Po przekształceniach:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\alpha_i(t)}{dt} \int_{\Omega_h} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i(x) K \nabla \varphi_j(x) dx = \int_{\Omega_h} f(x, t) \varphi_j(x) dx$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(0) \int_{\Omega_h} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \int_{\Omega_h} u^0(x) \varphi_j(x) dx$$

$j = 1, \dots, n$

Zagadnienie to można zapisać w postaci macierzowej:

$$B \frac{d\alpha(t)}{dt} + A\alpha(t) = F(t), \quad t \in (0, T)$$

$$B\alpha(0) = U^0$$

Elementy macierzy:

$$B_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, d\underline{x} \quad (\text{macierz masowa – ang. } \textit{mass matrix})$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot K \varphi_j \, d\underline{x} \quad (\text{macierz sztywności – ang. } \textit{stiffness matrix})$$

$$F_i(t) = \int_{\Omega} f(x,t) \varphi_i \, d\underline{x}$$

Macierze A i B są symetryczne i dodatnio określone.

Przypadek 1D

Przypomnijmy:

W przypadku 1D, przy równomiernym podziale na elementy o długości h zachodzi:

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} = \begin{cases} 2/h, & i = j \\ -1/h, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| > 1 \end{cases}$$

Macierz B ma podobną strukturę elementów niezerowych, a jej elementy wyrażają się zależnościami:

$$B_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j = \begin{cases} 4 \frac{h}{6}, & i = j \\ \frac{h}{6}, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| > 1 \end{cases}$$

W przypadku wykonywania obliczeń w 2D lub 3D do obliczania całek w macierzy B pomocne są wzory podane podczas omawiania podstawowych rodzajów elementów (wykład 5).

W wyniku wykonania dyskretyzacji przestrzennej oryginalne zagadnienie (*) zostało zastąpione układem równań różniczkowych zwyczajnych rzędu 1 (zagadnienie początkowe).

Dla semi-dyskretnego zagadnienia zachodzi (dla $f=0$):

- **Oszacowanie stabilności:**

$$\|u_h(t)\|_{L^2} \leq \|u_h(0)\|_{L^2} \leq \|u^0\|_{L^2}, \quad t \in (0, T]$$

- **Oszacowanie błędu:**

Przy założeniu, że obszar Ω jest wypukłym wielokątem (wielościąnem) pokrytym równomierną triangulacją o rozmiarze h , to zachodzi:

Twierdzenie

Istnieje stała C taka, że jeśli u jest rozwiązaniem zagadnienia ciągłego, zaś u_h spełnia zagadnienie semi-dyskretne, to:

$$\max_{t \in (0, T]} \|u(t) - u_h(t)\| \leq C \left(1 + \left| \log \frac{T}{h^2} \right| \right) \max_{t \in (0, T]} h^2 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}.$$

Stała C nie zależy od T .

(A zatem dla ‘optymalnej’ dyskretyzacji, zachodzi prawie optymalne oszacowanie błędu).

Krok 2: dyskretyzacja w czasie

Wykorzystuje się podejścia stosowane w metodzie różnic skończonych, zastępując pochodną po czasie ilorazem różnicowym:

$$\frac{d\alpha}{dt} \cong \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t}$$

$$B \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t} + A \alpha^{???} = F^{???}$$

Δt oznacza **krok czasowy**.

Zauważmy, że wartości α^n jako rozwiązanie z poprzedniego kroku czasowego, są znane. Natomiast wartości α^{n+1} nie są znane, w zależności od odwołania do kroku czasowego w miejscu indeksów ??? otrzymuje się schematy o różnym poziomie niejawności.

Rozważając zagadnienia zależne od czasu, należy wspomnieć o problemie **stabilności metody**. Przez stabilność numerycznego rozwiązania rozumie się brak narastania błędów w kolejnych krokach. Inaczej stabilność można określić poprzez stwierdzenie, że mała zmiana w danych (warunku początkowym) ma mały wpływ na rozwiązanie.

- Schemat jawny Eulera

??? zastępuje się odwołaniem do kroku poprzedniego:

$$B \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t} + A \alpha^n = F^n,$$

co oznacza, że należy rozwiązać układ równań liniowych w postaci:

$$B \alpha^{n+1} = (B - \Delta t A) \alpha^n + \Delta t F^n$$

Uwagi:

Jest to schemat warunkowo stabilny, co oznacza, że krok czasowy Δt musi być odpowiednio mały w porównaniu z krokiem dyskretyzacji:

$$\Delta t \leq Ch^2$$

Jest to bardzo ostre ograniczenie mówiące w szczególności, że krok czasowy Δt musi maleć w sposób podobny do h^2 w miarę jak dyskretyzacja przestrzenna ulega zagęszczeniu. Mały krok czasowy drastycznie zwiększa czas obliczeń.

W przypadku metody różnic skończonych schemat jawny ma tę przewagę nad schematem niejawnym, że wyznaczenie rozwiązania w kolejnej chwili czasowej nie wymaga rozwiązywania układu równań. W przypadku metody elementu skończonego macierz B nie jest macierzą diagonalną i w związku z tym nawet schemat jawny wymaga rozwiązywania układu równań.

- Schemat niejawnny Eulera

??? zastępuje się odwołaniem do kroku bieżącego:

$$B \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t} + A \alpha^{n+1} = F^{n+1},$$

co oznacza, że należy rozwiązać układ równań liniowych w postaci:

$$(B + \Delta t A) \alpha^{n+1} = B \alpha^n + \Delta t F^{n+1}$$

Uwagi:

Jest to schemat bezwarunkowo stabilny, to znaczy, że stabilność nie zależy od długości kroku czasowego. Błąd dyskretyzacji wynosi $O(\Delta t)$.

- Schemat Cranka-Nicholsona

Na bazie schematów jawnego i niejawnego można konstruować inne schemat w postaci kombinacji liniowej schematu jawnego i niejawnego. Szczególnym przypadkiem takiej kombinacji liniowej jest schemat Cranka-Nicholsona.

$$B \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t} + A \left(\frac{1}{2} \alpha^n + \frac{1}{2} \alpha^{n+1} \right) = \frac{1}{2} (F^n + F^{n+1})$$

$$\left(B + \frac{1}{2} \Delta t A \right) \alpha^{n+1} = \left(B - \frac{1}{2} \Delta t A \right) \alpha^n + \frac{1}{2} \Delta t (F^n + F^{n+1}).$$

Uwagi:

Jest to schemat bezwarunkowo stabilny, to znaczy, że stabilność nie zależy od długości kroku czasowego. Błąd dyskretyzacji wynosi $O((\Delta t)^2)$.

Kolejne punkty:

- Dyskretyzacja za pomocą metody elementu skończonego również względem czasu
W zasadzie nie stosuje się. przyczyna polega na tym, że bezpośrednio stosowanie metody elementu skończonego w postaci wykorzystywanej dla zagadnień brzegowych powoduje odejście od podstawowej zasady zagadnienia początkowego: rozwiązanie zagadnienia początkowego w ustalonej chwili zależy tylko od rozwiązania w chwilach poprzednich (por. obszary wpływu i zależności na schemacie z początku wykładu).
Metoda Galerkina wykorzystująca ciągle funkcje bazowe prowadzi do globalnie zależnego układu równań liniowych, to jest układu, w którym zmiana wartości w jednym węźle wpływa (przynajmniej teoretycznie) na rozwiązanie we wszystkich węzłach.

Lumping

Metody różnic skończonych zastosowane do zagadnień ewolucyjnych pozwalają otrzymać układy zagadnień początkowych bardzo podobne do układów otrzymywanych za pomocą metody elementów skończonych.

$$B \frac{d\alpha(t)}{dt} + A\alpha(t) = F(t)$$

Dla standardowo stosowanych metod różnic skończonych macierz B jest diagonalna. Rozważmy układ równań różniczkowych zwyczajnych w postaci:

$$D \frac{d\alpha(t)}{dt} + A\alpha(t) = F(t),$$

gdzie D jest macierzą diagonalną, w której wszystkie elementy z przekątnej są różne od zera i która 'odpowiada' macierzy B . Macierz D^{-1} jest również macierzą diagonalną; stąd łatwo przekształcić układ do postaci:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} + D^{-1}A\alpha(t) = D^{-1}F(t)$$

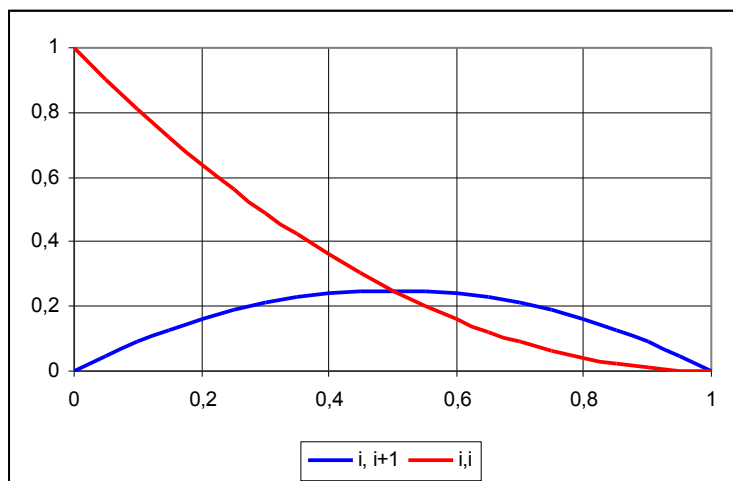
przed wykonaniem dyskretyzacji w czasie.

Idea jest taka, aby aproksymować macierz masy B macierzą diagonalną D . Nazywa się to *lumpingiem*. Realizuje się to poprzez dodanie (w każdym wierszu) elementów spoza przekątnej do przekątnej i wyzerowanie elementów poza przekątną.

Lumping można interpretować fizycznie jako zastąpienie ciągłego sznura, sznurem 'bez masy', za to z masą skomasowaną w węzłach.

Lumping może być też widziany jako czysto matematyczna procedura szczególnej aproksymacji macierzy B .

Rozważmy całkę postaci $B_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j$. Jest to całka z funkcji będącej iloczynem dwóch funkcji liniowej, czyli z funkcji kwadratowej oznaczonej jako $g_{ij}(x) = \varphi_i(x) \varphi_j(x)$.



Jeśli do wyznaczenia wartości całek zastosuje się kwadraturę Newtona-Cotesa (metoda trapezów):

$$\int_0^1 g_{ij}(x) dx \cong \frac{h}{2} (g_{ij}(x_i) + g_{ij}(x_j))$$

to rzeczywiście, zamiast trójdiagonalnej macierzy masowej B otrzyma się jej przybliżenie w postaci diagonalnej macierzy B .

Uwagi:

Schemat ‘lumped’ ma lepszy zakres stabilności. Jego wadami są natomiast gorsza dokładność oraz występowanie oscylacji.

Zagadnienie dyfuzji-adwekcji – równanie transportu

Równanie adwekcji-dyfuzji ma postać:

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (K \nabla u) + \underline{\beta} \cdot \nabla u + a_0 u = f \quad \text{w } \Omega$$

gdzie

K – współczynnik dyfuzji, w ogólnym przypadku reprezentowany za pomocą macierzy;

$\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in (L^\infty(\Omega))^3$ - dane pole prędkości

$a_0 \in L^\infty(\Omega)$ - skalarna funkcja (współczynnik absorpcji).

Równanie to jest uzupełnione zestawem warunków brzegowych oraz warunkiem początkowym.

Do tej pory zajmowaliśmy się ‘elementami’ tego równania:

- Rozwiązywaniem zagadnień parabolicznych: dyskretyzacja w przestrzeni metodą elementu skończonego oraz dyskretyzacja w czasie metodą różnic skończonych.
- Rozwiązywaniem równań eliptycznych z członem adwekcyjnym pierwszego rzędu: z jego powodu mogą występować oscylacje; ich tłumienie uzyskano wprowadzając specjalne funkcje wagowe (metoda Petrova-Galerkina). Zauważono, że sytuację poprawia zastosowanie schematów jednostronnych w aproksymowaniu członu adwekcyjnego – jeśli dyskretyzacja jest wykonywana za pomocą różnic skończonych.

- Układ równań liniowych jest układem o macierzy niesymetrycznej. Podobnie jest w zagadnieniach parabolicznych.

Problemy z uzyskaniem rozwiązania przybliżonego dotyczą również zagadnienia parabolicznego w przypadku gdy współczynnik dyfuzji K jest mały w porównaniu z współczynnikiem w członie adwekcyjnym (odpowiadającym polu prędkości).

Jeśli K jest małe to całe równanie przybiera hiperboliczny charakter, co jest przyczyną pojawiania się numerycznych problemów.

Jeśli K jest duże, to równanie jest równaniem parabolicznym z dominującym członem dyfuzyjnym. Tak więc jedynym 'dodatkowym kłopotem' jest brak symetrii w układzie równań liniowych.

W przypadku gdy dominuje człon adwekcyjny pojawiają się kłopoty, o których już wspomiano:

- Zastosowanie standardowych metod (np Galerkina) powoduje pojawianie się нефizycznych oscylacji w sąsiedztwie frontów.
- Z kolei próby ich zwalczania najczęściej są przyczyną dyfuzji, zbyt dużej w porównaniu z fizyczną, w wyniku której następuje 'rozmywanie się' ostrych frontów.

Zaowocowało to opracowaniem wielu metod numerycznych.

Obszerna klasa metod numerycznych bazuje na rozbiciu równania na dwie części, z których każda jest związana z innym układem współrzędnych. Metody te są ogólnie określane mianem **metod charakterystyk**.

Podobnie jak dla zagadnienia przepływu ciepła (zawierającego tylko człon dyfuzyjny) tak i w przypadku równania transportu dyskretyzacja przebiega w dwóch krokach: dyskretyzacji w przestrzeni i dyskretyzacji w czasie.

DODATEK**Numeryczne rozwiązywanie zagadnień parabolicznych – metoda różnic skończonych**

Będziemy zajmować się numerycznym wyznaczeniem rozwiązania przybliżonego zagadnienia dyfuzji:

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \nabla \cdot \kappa(x, y, z) \nabla u = f(t, x, y, z),$$

w którym dla uproszczenia zapisu przyjmiemy $\kappa = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \nabla \cdot \nabla u = f(t, x, y, z)$$

wraz z warunkiem początkowym

$$u(t_0, \underline{x}) = \eta(\underline{x})$$

oraz warunkami brzegowymi zdefiniowanymi dla każdej chwili czasowej.

$$D_+(u(x_i)) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

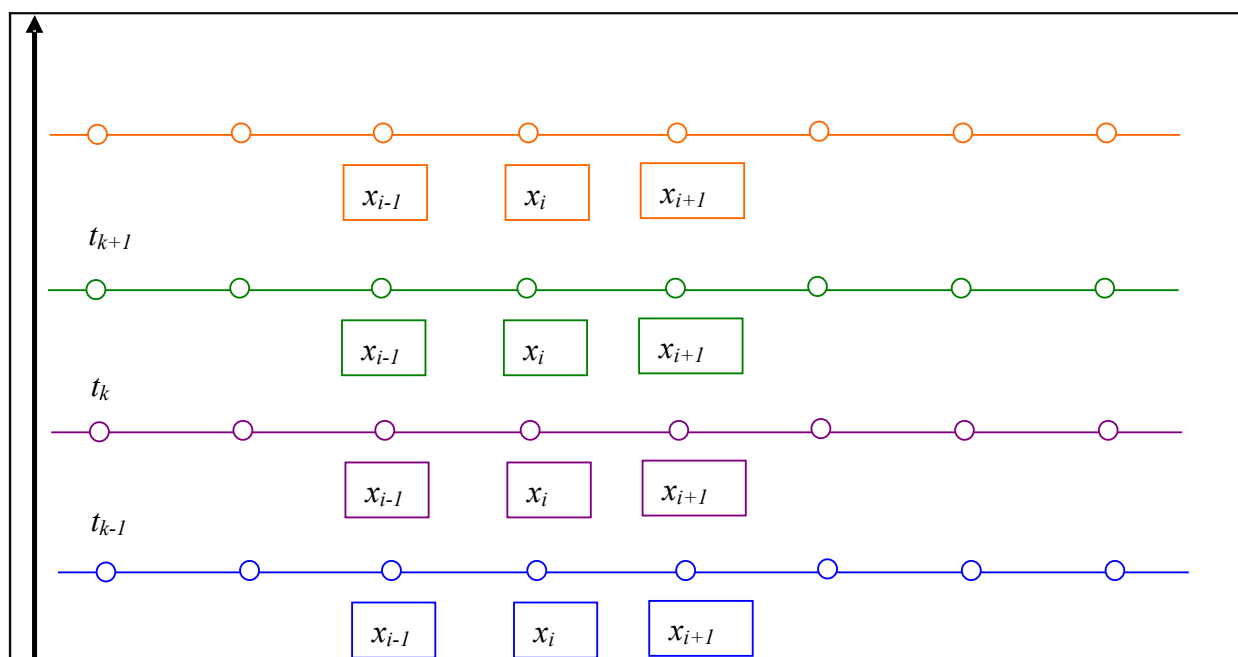
$$D_-(u(x_i)) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

$$D_0(u(x_i)) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

$$D^2(u(x_i)) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Oprócz dyskretyzacji przestrzennej (węzły x_i , zakłada się ich równomierne rozłożenie z krokiem h) wprowadza się dyskretyzację w czasie t_k , z krokiem Δt .

Numeryczne przybliżenie rozwiązania w węzle siatki x_i w chwili t_k będzie oznaczane za pomocą dwóch indeksów jako u_i^k .



Zagadnienie dyskretne zostanie skonstruowane w ten sposób, aby rozwiązywać równanie dla kolejnych chwil czasowych po kolei. Rozwiązanie w kolejnej chwili czasowej $k+1$ będzie bazowało na rozwiązaniu w chwili k (ewentualnie na warunku początkowym t_0).

Do aproksymowania składnika $\frac{\partial u}{\partial t}$ wykorzystuje się schematy aproksymujące pierwszą pochodną:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} - \frac{u_{i-1}^? - 2u_i^? + u_{i+1}^?}{h^2} = f_i^{k+1}$$

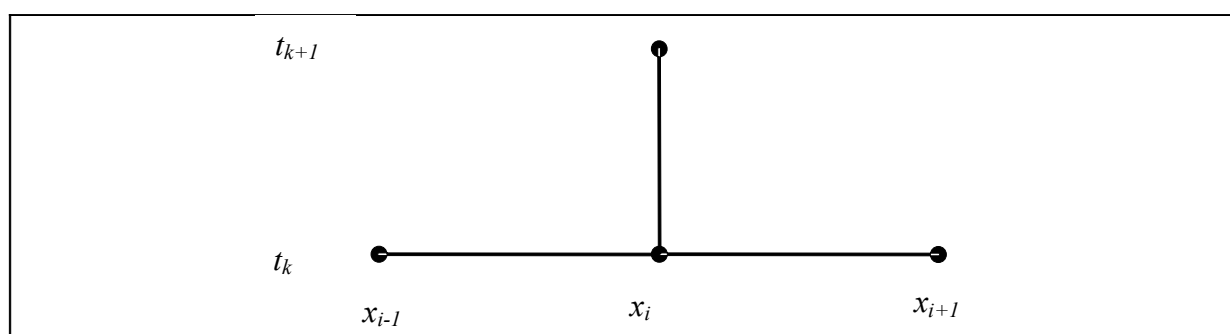
Podkreślmy, że indeks górny k oznacza wartości już znane (wyznaczone wartości dla poprzedniej chwili czasowej), zaś wartości z indeksem $k+1$ są wyznaczane.

Znaki zapytania '?' mają na celu podkreślenie faktu, że możliwe są różne sposoby przedstawienia składnika przestrzennego.

Schemat jawny

Metodą jawną otrzymuje się wykorzystując w aproksymacji składnika przestrzennego wartości z poprzedniego kroku czasowego:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} - \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} = f_i^{k+1}$$



Oznacza to, że rozwiązania w kolejnych punktach w chwili $k+1$ można wyznaczać niezależnie. W szczególności nie ma potrzeby rozwiązywania układu równań liniowych jak to miało miejsce w przypadku zagadnienia eliptycznego.

Ale:

Pojawia się problem **stabilności metody**. Przez stabilność numerycznego rozwiązania rozumie się brak narastania błędów w kolejnych krokach; inaczej, czy rozwiązanie przybliżone u_i^k pozostaje ograniczone gdy $k \rightarrow \infty$.

Podany powyżej schemat jest schematem **warunkowo stabilnym**, zaś warunek stabilności definiuje się poprzez zależność wiążącą długość kroku czasowego i przestrzennego:

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

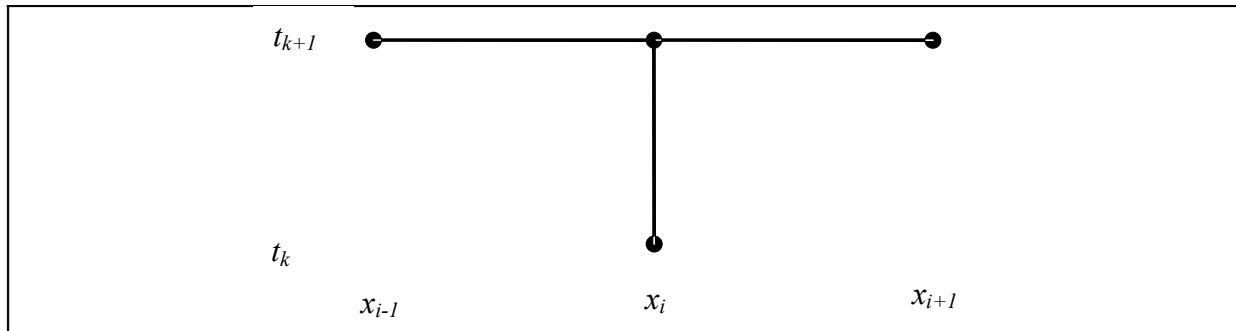
Jest to bardzo ostre ograniczenie mówiące w szczególności, że krok czasowy musi maleć w sposób podobny do h^2 w miarę jak dyskretyzacja przestrzenna ulega zagęszczaniu. Mały krok czasowy drastycznie zwiększa czas obliczeń.

Schemat niejawny

W miejsce znaków zapytania ‘?’ można umieścić odwołanie do nieznanych wartości funkcji w chwili $k+1$, uzyskując w ten sposób schemat niejawny:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} - \frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2} = f_i^{k+1}$$

Graficznie schemat przedstawia się następująco:

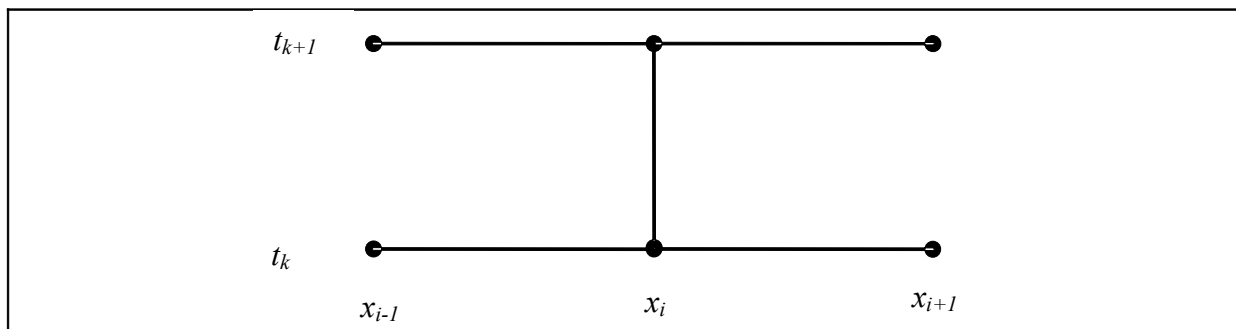


Ze względu na powiązania pomiędzy u_{i-1}^{k+1} , u_i^{k+1} oraz u_{i+1}^{k+1} rozwiązanie dla chwili czasowej $k+1$ wymaga rozwiązania układu równań.

Schemat niejawny – schemat Cranka-Nicholsona

W praktyce bardzo często stosuje się bezwarunkowo stabilny schemat Cranka-Nicholsona, w którym ‘połowa’ aproksymacji składnika przestrzennego odnosi się do ‘przeszłości’ (chwila czasowa k), zaś połowa do ‘teraźniejszości’ (chwila czasowa $k+1$):

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} = f_i^{k+1}$$



Metody bezwarunkowo stabilne pozwalają na wykorzystanie większych kroków czasowych. Tym samym można szybciej przeprowadzić symulacje.

Równanie adwekcji – zagadnienia z czasem

Jednowymiarowe równanie adwekcji

$$u_t + au_x = 0$$

może być aproksymowane za pomocą wielu schematów.

Schemat jawny wykorzystujący różnice centralne do aproksymowania składnika adwekcyjnego:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h}$$

nie jest wykorzystywany w praktyce, bowiem jest to metoda zawsze niestabilna.

Schemat niesymetryczny:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = -a \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h}$$

jest schematem **warunkowo stabilnym**.

Ogólnie, warunkiem stabilności dla schematów warunkowo stabilnych aproksymujących równanie adwekcji jest:

$$0 \leq \frac{a \Delta t}{h} \leq 1 \text{ dla } a > 0, \text{ lub } -1 \leq \frac{a \Delta t}{h} \leq 0 \text{ dla } a < 0.$$

Jest to szczególny przypadek warunku znanego jako warunek CFL (Couranta, Friedrichsa, Lewy'ego). Wartość $\nu = \frac{a \Delta t}{h}$ jest nazywana **liczbą Couranta**.

Warunek CFL:

Metoda numeryczna może być zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy obszar numerycznej zależności zawiera obszar zależności oryginalnego zagadnienia różniczkowego cząstkowego.

Podczas dyskretyzacji równania adwekcji w zależności od zastosowanego schematu mogą pojawić się: numeryczna dyfuzja oraz niefizyczne oscylacje.

Podsumowanie:

W przypadku numerycznego modelowania zagadnień ewolucyjnych zarówno dla metody różnic skończonych, jak i dla metody elementu skończonego oraz objętości skończonych zachodzi:

- Rozwiązania są wyznaczone dla kolejnych kroków czasowych. Oznacza to, że symulacje mogą trwać bardzo długo!
- W zależności od wykorzystanych schematów dyskretyzacji czasu oraz rodzaju rozwiązywanego równania, mogą wystąpić ograniczenia definiujące wzajemną zależność długości kroku czasowego oraz wielkości dyskretyzacji przestrzennej. Spełnienie tych warunków jest bardzo ważne dla uzyskania stabilnego rozwiązania.

Z każdym schematem różnic skończonych łączą się następujące pojęcia:

- zgodność (ang. *consistency*): czy operator różnicowy dobrze reprezentuje dokładny operator różniczkowy
- zbieżność (ang. *convergence*): czy rozwiązanie otrzymane metodą różnic skończonych w granicy zbiega do rozwiązania dokładnego
- stabilność (ang. *stability*): czy rozwiązanie przybliżone u_i^k pozostaje ograniczone gdy $k \rightarrow \infty$.