

Części:

- nawiązanie do tematyki poprzednich spotkań
- metoda elementu skończonego
- sformułowanie mieszane

Fakty wg. Haïm Brezis, *Analyse Fonctionnelle – Théorie et applications*

Twierdzenie Riesz-Frécheta

Niech $\varphi \in H'$. Istnieje jedyne $f \in H$ takie, że

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H.$$

Co więcej, $\|f\| = \|\varphi\|_{H'}$.

Oznaczamy $\langle f, x \rangle$ w miejsce $f(x)$.

$|\cdot|$ - norma Hilbertowska

Definicje:

Forma dwuliniowa $a(u, v) : H \times H \rightarrow R$ jest

- **ciągła** jeśli istnieje stała C taka, że:

$$|a(u, v)| \leq C |u| \cdot |v| \quad \forall u, v \in H$$

- **koercytywna** jeśli istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że:

$$a(u, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Lemat Laxa-Milgrama

Niech $a(u, v)$ - forma dwuliniowa, ciągła i koercytywna. Wtedy dla każdego $\varphi \in H'$ istnieje $u \in H$, jednoznaczne, takie, że:

$$(1) \quad a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Dodatkowo, jeśli a jest symetryczna, to wtedy u jest charakteryzowana przez:

$$(2) \quad u \in H \text{ i } \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

Uwaga: Lemat Laxa-Milgrama jest prostym i wydajnym narzędziem wykorzystywanym do rozwiązywania eliptycznych liniowych równań różniczkowych cząstkowych. Ciekawy jest związek pomiędzy równaniem (1) i zagadnieniem minimalizacji (2). Ten związek ma często interpretację fizyczną (zasada najmniejszego oddziaływania, minimalizacja energii, itp). W terminologii rachunku wariacyjnego równanie (1) nazywa się równaniem Eulera dla zagadnienia minimalizacji (2). Zauważmy, że równanie (1) otrzymuje się jako $F'(u) = 0$, gdzie $F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle$.

Równanie (1) posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Zagadnienie:

- Poszukuje się funkcji $u : \Omega \rightarrow R$ spełniającej:

$$(3) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot K \nabla u + u = f & \text{na } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Definicja:

Rozwiązaniem **klasycznym** zagadnienia (3) jest funkcja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ spełniająca (3).

Rozwiązaniem **słabym** zagadnienia (3) jest funkcja $u \in H_0^1(\Omega)$ spełniająca

$$(4) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot K \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

gdzie:

$$H_0^1(\Omega) = \{\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \in H^1(\Omega) \text{ i } \forall x \in \Gamma \omega(x) = 0\}, \text{ zaś}$$

$$H^1(\Omega) = \{\omega \in L^2(\Omega), \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \dots \in L^2(\Omega)\}$$

$H^1(\Omega)$ to przestrzeń funkcji rzeczywistych określonych na Ω , które są całkowne w kwadracie i których pierwsze pochodne po wszystkich zmiennych są również całkowne w kwadracie. W ‘praktyce inżyniera’ $H^1(\Omega)$ oznacza przestrzeń wystarczająco gładkich funkcji.

Postępowanie:**Etap A:**

Każde rozwiązanie klasyczne jest rozwiązaniem słabym.

Etap B:

Istnienie i jednoznaczność słabego rozwiązania.

Twierdzenie (Dirichlet, Riemann, Hilbert)

Dla każdego $f \in L^2(\Omega)$ istnieje jednoznaczne słabe rozwiązanie $u \in H_0^1(\Omega)$ zagadnienia (4).

Co więcej, u otrzymuje się jako rozwiązanie zagadnienia

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_{\Omega} fv \right\}.$$

Dowód: Stosuje się lemat Laxa-Milgrama w przestrzeni $H = H_0^1(\Omega)$ z formą dwuliniową

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot K \nabla v + uv) \text{ i formą dwuliniową } \varphi : v \rightarrow \int_{\Omega} fv.$$

Etap C:

Regularność słabego rozwiązania („*Cette question est délicate*”).

Etap D

Powrót do rozwiązania klasycznego.

Zakłada się, że słabe rozwiązanie zagadnienia (4) $u \in H_0^1(\Omega)$ należy do $C^2(\overline{\Omega})$ oraz że Ω jest klasy C^1 .

Otrzymuje się równoważność trzech sformułowań: klasycznego, słabego (nazywanego też wariacyjnym) oraz zagadnienia minimalizacji.

Metoda elementu skończonego wykorzystuje słabe sformułowanie

Metoda elementu skończonego wyróżnia się w klasie metod wariacyjnych specjalną konstrukcją przestrzeni skończenie wymiarowych. Obszar dzieli się na podobszary nazywane **elementami**.

Zgodnie z podejściem charakterystycznym dla metody Ritza i Galerkina, rozwiązań poszukuje się w przestrzeni skończenie wymiarowej. Wprowadza się ciąg przestrzeni **skończenie wymiarowych** $H_h^1(\Omega)$ aproksymujących przestrzeń $H^1(\Omega)$. Indeks h podkreśla zależność przestrzeni skończenie wymiarowej od **dyskretyzacji obszaru**, w oparciu o którą konstruuje się przestrzeń $H_h^1(\Omega)$.

Standardowa metoda elementu skończonego wykorzystuje **aproksymację wewnętrzną**, co inaczej można wyrazić jako: rozwiązanie przybliżone należy do przestrzeni, która jest zawarta w przestrzeni rozwiązań dokładnych.

Oznaczamy:

$$H_{0h}^1(\Omega_h) = \{\omega_h : \Omega_h \rightarrow R, \omega_h \in H_h^1(\Omega_h) \text{ i } \forall x \in \Gamma_h \omega_h(x) = 0\}$$

Indeks h pojawił się również przy oznaczeniach obszaru Ω_h i brzegu Γ_h .

Zachodzi:

$$H_{0h}^1(\Omega_h) \subset H_0^1(\Omega)$$

czyli przestrzeń skończenie wymiarowa, w której poszukiwane jest rozwiązanie przybliżone, jest „mniejsza” od przestrzeni, do której należy rozwiązanie dokładne. Nawiązując do sformułowania w postaci minimalizacji funkcjonału z powyższej zależności wynika, że wartość funkcjonału dla rozwiązania przybliżonego będzie ‘trochę’ większa niż dla rozwiązania dokładnego.

Konstrukcja przestrzeni skończenie wymiarowej

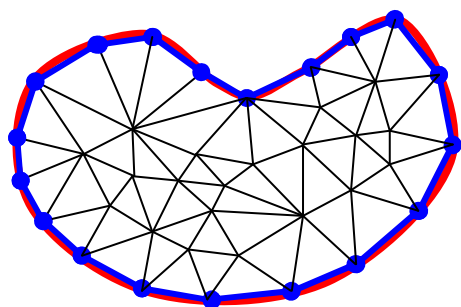
Rozwiązania przybliżonego u_h poszukujemy w przestrzeni skończenie wymiarowej oznaczonej jako V_h .

Dla równań rzędu drugiego potrzeba, aby $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Zachodzi:

$V_h \subset H^1(\Omega) \Leftrightarrow$ funkcje $\omega_h \in V_h$ są ciągłe .

Konstrukcja przestrzeni $H_{gh}^1(\Omega_h)$ lub $H_h^1(\Omega_h)$ odbywa się w oparciu o **triangulację** (dyskretyzację) obszaru obliczeniowego.



Przykład dyskretyzacji w D2

Przestrzeń skończenie wymiarowa $H_{gh}^1(\Omega_h)$ składa się z funkcji, które na poszczególnych elementach są **wielomianami ustalonego stopnia**. Wielomiany te sklejają się tak, aby zachować odpowiednią regularność $H_{gh}^1(\Omega_h)$, a tym samym zapewnić spełnienie warunku $H_{0h}^1(\Omega_h) \subset H_0^1(\Omega)$.

Prawdopodobnie najczęściej wykorzystywana przestrzeń skończenie wymiarowa. Definiuje się:

$$H_h^1(\Omega_h) = \{\varphi_h : \Omega_h \rightarrow R, \varphi_h \text{ ciągła na } \Omega_h \text{ i } \forall K \in T_h \varphi_h|_K \text{ liniowa}\}$$

Zachodzi:

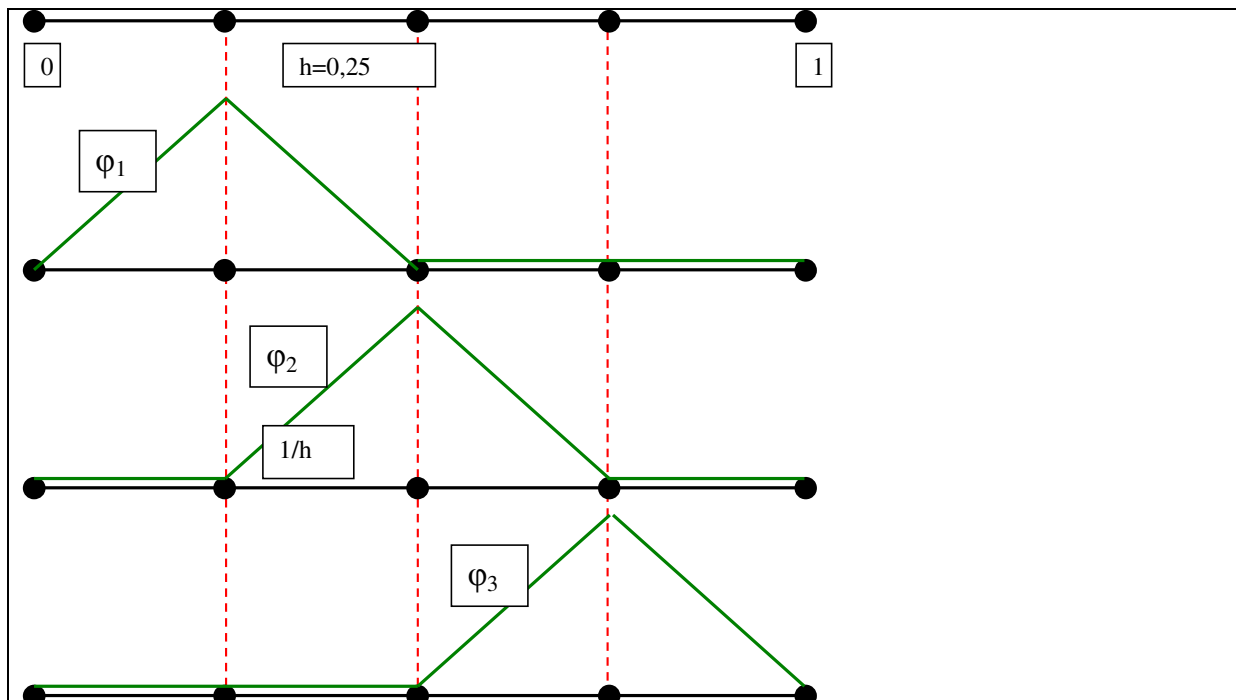
Każda funkcja z $H_h^1(\Omega_h)$ jest **jednoznacznie** określona przez wartości w wierzchołkach dyskretyzacji.

Konstrukcja bazy $H_h^1(\Omega_h)$

Definicja:

Funkcja **bazowa** φ_i (funkcja **kształtu** – ang. *shape function*), związana z wierzchołkiem i jest następująca:

- φ_i jest ciągłą funkcją $\Omega_h \rightarrow R$
- φ_i jest liniowa na elemencie
- $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$, x_j – wierzchołek dyskretyzacji.



Metoda elementu skończonego – Kroki - Podsumowanie:

- Sformułowanie wariacyjne (słabe).
- Wyznaczanie rozwiązania przybliżonego \hat{u} należącego do przestrzeni skończenie wymiarowej. Zatem \hat{u} może być reprezentowana jako **liniowa kombinacja** funkcji bazowych tej przestrzeni.
- Zastosowanie w słabym sformułowaniu jako funkcji wagowych funkcji bazowych pozwala wygenerować układ równań algebraicznych i znaleźć przybliżone rozwiązanie.

Przykład

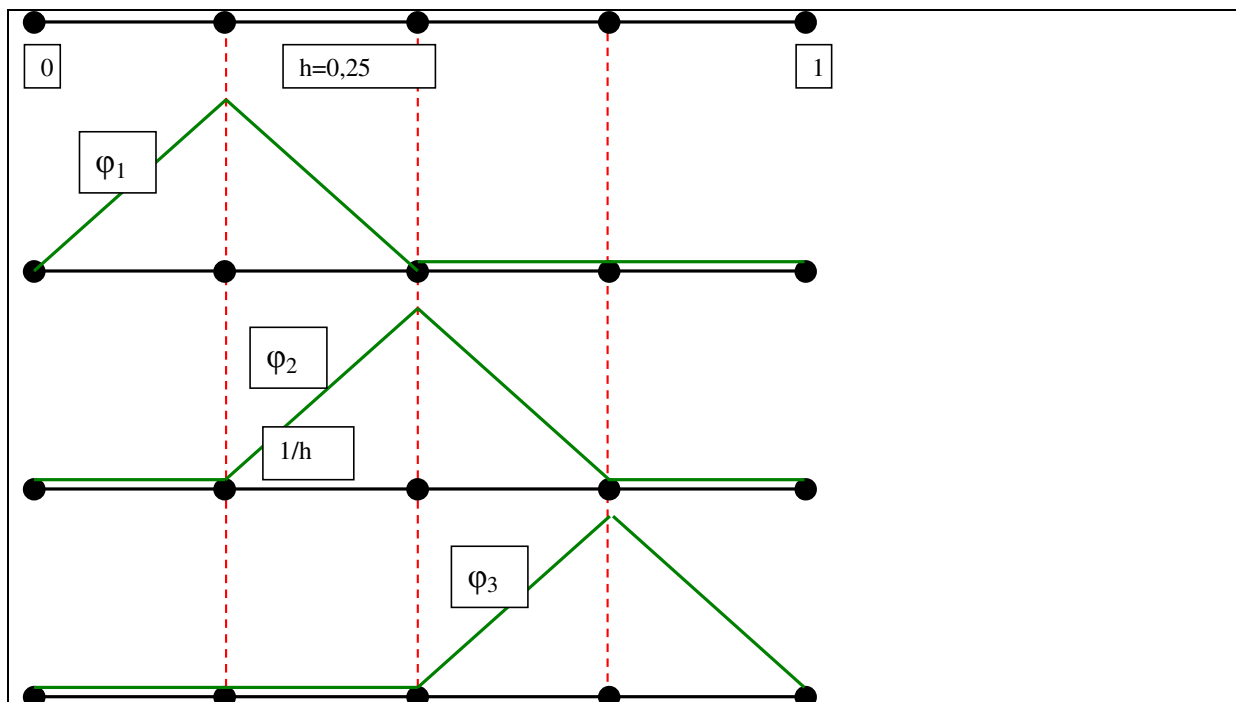
Poszukuje się rozwiązania zagadnienia:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 10 \text{ w } (0, 1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Dokładne rozwiązanie tego zagadnienia to $u(x) = -5x^2 + 5x$.

Rozwiązanie dyskretne ‘rozepniemy’ na dyskretyzacji złożonej z czterech elementów (o równej długości).



Słabe sformułowanie:

Znaleźć $\hat{u} \in H_{0h}^1((0, 1))$ taką, że $\forall \omega \in H_{0h}^1((0, 1))$ zachodzi

$$\int_0^1 \frac{d\hat{u}}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} dx = \int_0^1 10 \cdot \omega dx$$

Rozwiązanie przybliżone jest wyrażone w postaci kombinacji liniowej:

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \varphi_i$$

Po podstawieniu do słabego sformułowania otrzymuje się układ trzech równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} & \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} & \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} & \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} & \dots \\ \dots & \dots & \int_0^1 \frac{d\varphi_3}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 10 \cdot \varphi_1 \\ \int_0^1 10 \cdot \varphi_2 \\ \int_0^1 10 \cdot \varphi_3 \end{bmatrix},$$

skrótowo oznaczany jako $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}$

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} dx &= \int_0^h \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} dx + \int_0^h \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) dx = 2h \frac{1}{h^2} = \frac{2}{h}, \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} dx &= \int_h^{2h} \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot \frac{1}{h} dx = h \left(-\frac{1}{h^2}\right) = -\frac{1}{h} \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} dx &= 0 \end{aligned}$$

W ogólności zachodzi:

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} = \begin{cases} 2/h, & i = j \\ -1/h, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| > 1 \end{cases}, \quad B_i = \int_0^1 10 \cdot \varphi_i dx = 10 * h$$

Ważne: Kiedy elementy macierzy układu równań mają wartość **zero**?

Macierze powstające w toku realizacji metody elementu skończonego są **rzadkie** (*sparse*), tzn. duża liczba ich elementów ma wartość zero.

CZĘŚĆ DRUGA

Zawartość:

- Przykład jednowymiarowy – krok po kroku.
- Sformułowanie mieszanej metody elementu skończonego.

Przykład jednowymiarowy – rozważany już podczas poprzedniego spotkania

Poszukuje się rozwiązania zagadnienia:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 10 \text{ w } (0, 1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

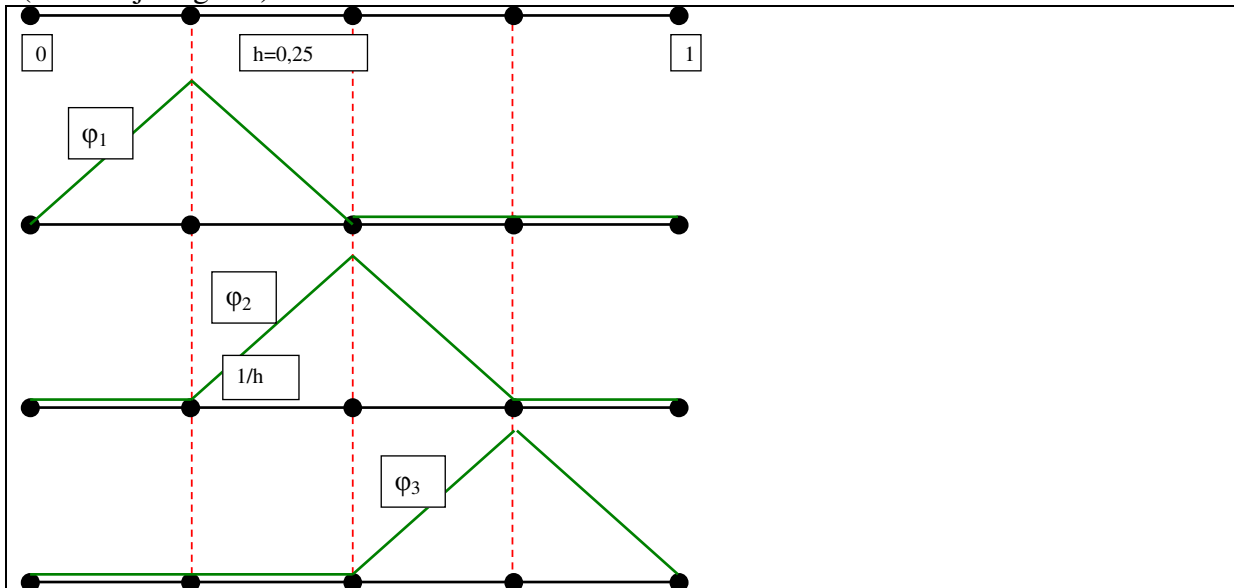
Dokładne rozwiązanie tego zagadnienia to $u(x) = -5x^2 + 5x$.

Słabe sformułowanie:

Znaleźć $u_h \in H_{0h}^1((0, 1))$ taką, że $\forall \omega \in H_{0h}^1((0, 1))$ zachodzi

$$\int_0^1 \frac{du_h}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} dx = \int_0^1 10 \cdot \omega dx$$

Rozważmy przestrzeń skonstruowaną w oparciu o podział odcinka $[0, 1]$ na cztery elementy (o równej długości).



Zerowy warunek Dirichleta jest **wbudowany** w tę przestrzeń – wszystkie funkcje wyrażone za pomocą funkcji bazowych $\varphi_i, i = 1, \dots, 3$ zerują się na brzegu obszaru. Mówi się, że warunek Dirichleta jest **warunkiem zasadniczym**.

Rozwiązanie przybliżone jest wyrażone w postaci kombinacji liniowej:

$$u_h = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \varphi_i$$

Po podstawieniu do słabego sformułowania otrzymuje się układ trzech równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} & \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} & \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} & \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} & \dots \\ \dots & \dots & \int_0^1 \frac{d\varphi_3}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 10 \cdot \varphi_1 \\ \int_0^1 10 \cdot \varphi_2 \\ \int_0^1 10 \cdot \varphi_3 \end{bmatrix},$$

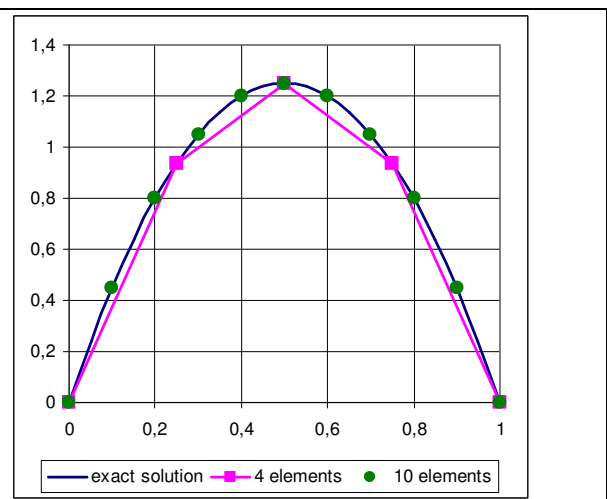
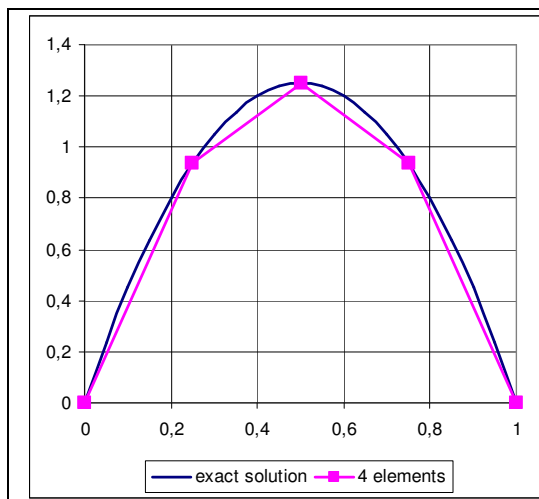
skrótowo oznaczany jako $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}$

Arkusz Excela – podział obszaru obliczeniowego na 4 elementy ($h=0,25$)

									4 elements
	0,25							0	0
	8	-4	0		2,5	0,25		0,9375	
	-4	8	-4		2,5	0,5		1,25	
	0	-4	8		2,5	0,75		0,9375	
						1		0	

Podział obszaru obliczeniowego na 10 elementów (h=0,1)

	0,1								
	20	-10	0	0	0	0	0	0	0
	-10	20	-10	0	0	0	0	0	0
	0	-10	20	-10	0	0	0	0	0
	0	0	-10	20	-10	0	0	0	0
	0	0	0	-10	20	-10	0	0	0
	0	0	0	0	-10	20	-10	0	0
	0	0	0	0	0	-10	20	-10	0
	0	0	0	0	0	0	-10	20	-10
	0	0	0	0	0	0	0	-10	20



Warunek brzegowy Neumanna:

A teraz zmieniamy warunek brzegowy w punkcie 1 na zerowego Neumanna, czyli rozwiążemy zagadnienie:

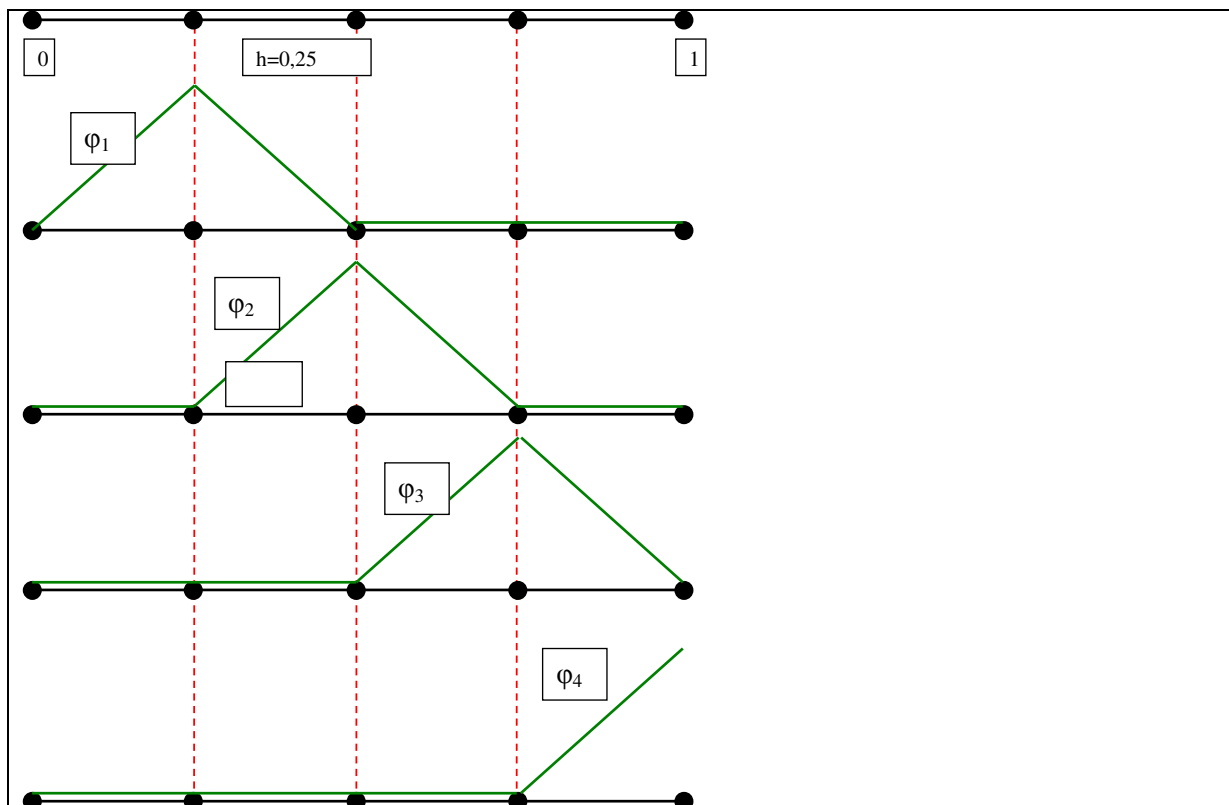
$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 10 \text{ w } (0, 1)$$

$$u(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_1 = 0$$

Jak będzie wyglądało rozwiązanie?

Ponownie rozważamy podział obszaru obliczeniowego na 4 elementy.

Rozwiązanie w końcowym punkcie przedziału nie jest znane – a zatem liczba niewiadomych wzrośnie o 1:



Sięgamy do arkusza:

$h=0,25$	Neumann			
8	-4	0	0	2,5
-4	8	-4	0	2,5
0	-4	8	-4	2,5
0	0	-4	4	1,25

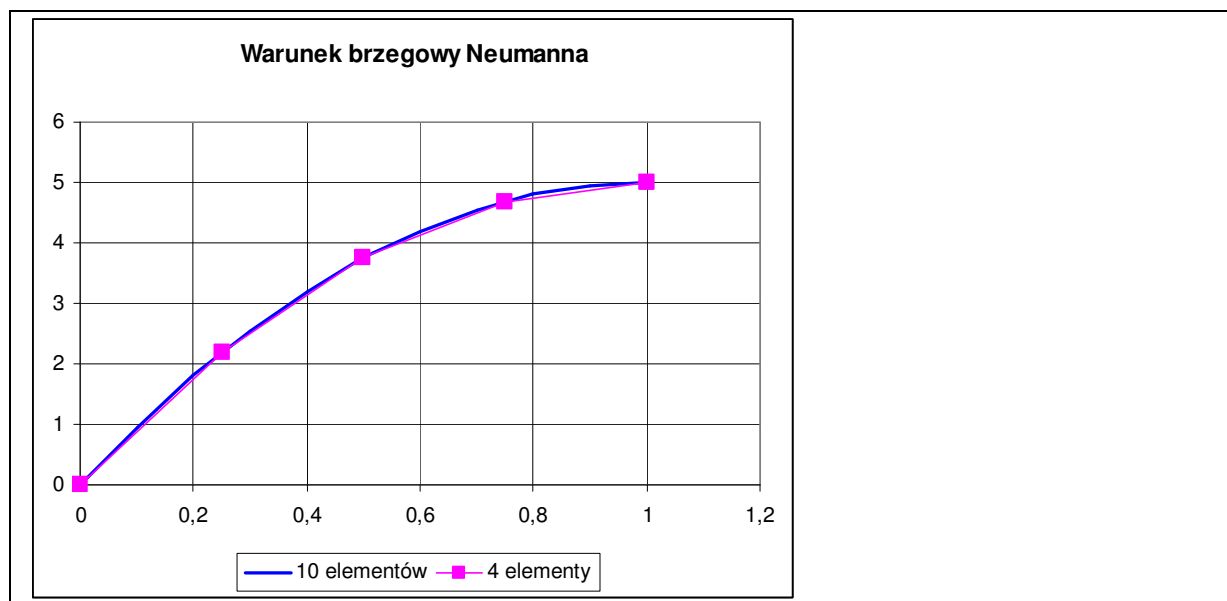
UWAGA: W poprzednio rozwiązywanym zagadnieniu z warunkiem brzegowym Dirichleta uzyskany układ równań był następujący:

						4 elements	
0,25					0	0	
8	-4	0		2,5	0,25	0,9375	
-4	8	-4		2,5	0,5	1,25	
0	-4	8		2,5	0,75	0,9375	
					1	0	

Podział obszaru obliczeniowego na 10 elementów ($h=0,1$), w $x=1$ warunek Neumanna.

h=0,1										
Neumann										
20	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-10	20	-10	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-10	20	-10	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-10	20	-10	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-10	20	-10	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-10	20	-10	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-10	20	-10	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-10	20	-10	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-10	20	-10	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-10	20	-10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	10

1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
0,5



W ogólnym przypadku należy uwzględnić:

- brak założenia o równej długości odcinków podziału
- obszar niejednorodny
- dopuszczalna jest numeracja węzłów nie ‘po kolei’

Metoda elementu skończonego – sformułowanie mieszane

W dalszym ciągu rozważane jest równanie Poissona:

- Poszukuje się funkcji $u : \Omega \rightarrow R$ spełniającej:

$$(1) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot K \nabla u = f & \text{na } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Oryginalne zagadnienie zastępuje się układem równań różniczkowych cząstkowych:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{q} = -K \nabla u \\ \nabla \cdot \mathbf{q} = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

po dalszym przekształceniu:

$$(3) \quad \begin{cases} K^{-1} \mathbf{q} + \nabla u = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{q} = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Jak szukać rozwiązania tego układu wykorzystując podejście metody elementu skończonego? Pierwsze równanie z układu (3) mnoży się przez funkcję wektorową $\mathbf{v} \in H_{0N}^1(\text{div}; \Omega)$, natomiast drugie równanie mnoży się przez funkcję skalarną $\varphi \in L^2(\Omega)$. Wszystko całkuje się po obszarze Ω . Otrzymuje się:

$$(4) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} \cdot \varphi = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Drugi składnik pierwszego równania przekształca się korzystając z twierdzenia Greena:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} = - \int_{\Omega} u \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} u \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$$

Otrzymuje się słabe sformułowanie oryginalnego zagadnienia w postaci mieszanej:

Znaleźć parę $(\mathbf{q}, u) \in H_{0N}^1(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ taką, że

$$(5) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} u \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \forall \mathbf{v} \in H_{0N}^1(\text{div}; \Omega) \\ - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} \cdot \varphi = - \int_{\Omega} f \cdot \varphi & \forall \varphi \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Dowodzi się, że słabe zagadnienie posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

Przestrzenie, w których poszukuje się rozwiązania przybliżonego, muszą być **zgodne** (ang. *consistent*). Warunek Ładyżeńskiej - Brezzi – Babuški.

Rozwiązanie przybliżone:

$$(6a) \quad \mathbf{q}_h = \sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{\psi}_i$$

\mathbf{q}_h i $\boldsymbol{\psi}_i$ - funkcje wektorowe, natomiast współczynniki α_i są skalarami.

$$(6b) \quad u_h = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i$$

Stopnie swobody $\boldsymbol{\psi}_i$ są związane z krawędziami (2D) albo ściankami (3D) elementów.

Podstawia się reprezentacje (6) do równań (5):

$$(7) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{\Omega} (K^{-1} \boldsymbol{\psi}_i)^T \cdot \boldsymbol{\psi}_j - \sum_{i=1}^n \beta_i \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_j = 0 \\ - \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_i \varphi_k = - \int_{\Omega} f \varphi_k \end{cases}$$

$j=1, \dots, m$ (krawędzie), $k=1, \dots, n$ (elementy)

Odpowiada to układowi równań o $m+n$ niewiadomych:

$$(8) \quad \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \text{ gdzie:}$$

$$A = \int_{\Omega} (K^{-1} \psi_i)^T \cdot \psi_j$$

$$B = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \psi_i \varphi_j$$

$F_1 = 0$ (w ogólnym przypadku tu znajduje się niezerowy warunek Dirichleta. Należy wspomnieć, że w porównaniu ze standardowym sformułowaniem metody elementów skończonych, ulega zmianie ‘klasyfikacja’ warunków brzegowych: obecnie warunek Neumanna jest warunkiem zasadniczym, natomiast warunek Dirichleta jest warunkiem naturalnym i spełniony jest w słabym sensie.)

$$F_2 = - \int_{\Omega} f \varphi_j$$

Konkretne wartości elementów macierzy oraz wektorów prawej strony można podać po zdefiniowaniu konkretnych przestrzeni.

Najprostszą dyskretyzacją jest dyskretyzacja Raviart-Thomasa.

1) Ze słabej postaci (5) i (7) wynika, że funkcja u może być aproksymowana nieciągłymi funkcjami. W szczególności wystarczy przestrzeń funkcji V_h taka, że:

$$V_h = \{v|_K \text{ jest stała}\}$$

Więszym problemem jest aproksymacja przestrzeni $H_{0N}^1(\text{div}; \Omega)$. W konstrukcji tej aproksymacji pomocny jest następujący lemat:

Jeśli \mathbf{q} jest gładka na elemencie ($\mathbf{q}|_K \in H^1(K)$), to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby $\int_{\Omega} |\nabla \cdot \mathbf{q}|^2 < \infty$ jest **ciągłość** składowej normalnej \mathbf{q} na krawędziach elementów.

Układ równań liniowych (8) nie jest korzystny do rozwiązywania. Macierz co prawda jest symetryczna, ale nie jest dodatnio określona. Co więcej, jej rozmiar jest bardzo duży (równy sumie elementów oraz krawędzi/ ścianek). Dlatego zagadnienie w postaci mieszanej przekształca się dalej do postaci *hybrydowej* poprzez:

- Powiększenie przestrzeni Raviart-Thomasa poprzez odstąpienie od wymogu ciągłości na krawędziach/ ściankach. Oznacza to wyjście poza aproksymację wewnętrzną. Można na to patrzeć jak na rozdzielanie poszczególnych elementów tworzących dyskretyzację.
- Równocześnie, aby jednak ciągłość tę zachować, wprowadza się do układu dodatkową funkcję (mnożniki Lagrange’a).

Gdyby odwołać się do przypadku 1D: to ‘jakby’ każda funkcja kapeluszkowa zostaje rozcięta na pół – w wyniku czego każdy węzeł (TU: odpowiednik krawędzi) występuje dwa razy. A potem pojawia się ‘coś’ na krawędzi (w przypadku 1D jest to też węzeł), co niejako z zewnątrz będzie wymuszać ciągłość strumienia przy przejściu między elementami.