Równoważność:

- Poszukiwanie ekstremum funkcjonału
- **Słabe sformułowanie**
- Zagadnienie różniczkowe cząstkowe

Przybliżone wyznaczanie ekstremum funkcjonału – metoda Ritza
Dla pewnej klasy zagadnień inżynierskich istnieją zasady maksimum, które pozwalają sformułować oryginalne zadanie jako wyznaczenie ekstremum odpowiedniego funkcjonału. Zasada maksimum stanowi naturalny opis w zagadnieniach mechanicznych (przemieszczenie, odkształcenie, naprężenie), jako opis energii układu, która jest minimalna w stanie równowagi. Ponieważ rozwiązania dokładne dają się wyznaczyć tylko dla wąskiej klasy zagadnień, poszukuje się rozwiązań przybliżonych.

Idea:
Zastępuje się: rozwiązanie dokładne – rozwiązaniem przybliżonym, funkcjonał – funkcją wielu zmiennych (parametrów, za pomocą których opisuje się poszukiwaną funkcję).

Metoda Ritza
Walter Ritz (1878 – 1909). Metoda Ritza wykorzystuje idee sformułowane przez Rayleigh (1842 – 1919, lord Rayleigh, właściwie John William Strutt).

Kroki:
- Wybiera się zbiór liniowo niezależnych funkcji $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Funkcja φ_0 pełni szczególną rolę: musi spełniać różne od zera warunki brzegowe. Pozostałe funkcje zerują się na brzegu.
- Poszukiwaną funkcję przedstawia się w postaci kombinacji liniowej:

$$\hat{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i \ \varphi_i$$

Cel:
Wyznaczyć współczynniki C_i. Zauważmy, że funkcja $\hat{u}$ spełnia warunek brzegowy.

- Po podstawieniu reprezentacji w postaci kombinacji liniowej do funkcjonału, staje się on funkcją zależną od poszukiwanych współczynników C_i, i=1,…,n .
- Z warunku koniecznego ekstremum (zerowanie się pochodnych cząstkowych) otrzymuje się układ n równań, z którego można wyznaczyć współczynniki C_i, i=1,…,n .

PRZYKŁAD

Metoda ważonych residuów – metoda Galerkina

Boris Grigoriewicz Galerkin (1871-1945)

Jest wiele sposobów dojścia do sformułowania *metody Galerkina*; jeden z nich to *metoda wao nych residuów* (*Metod of Weighted Residuals*).

Idea:
- Rozwiązywane jest równanie różniczkowe cząstkowe, na przykład.:

$$-\Delta u = f \quad na \quad \Omega$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = g$$

- Poszukujemy rozwiązania przybliżonego $\hat{u}$, korzystając z reprezentacji w postaci kombinacji liniowej:

$$\hat{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i \ \varphi_i ,$$

gdzie funkcje φ_i są liniowo niezależne i na brzegu przyjmują wartość 0. Funkcja φ_0 odpowiada za spełnienie niezerowego warunku brzegowego. Funkcje φ_i nazywa się funkcjami kształtu (*shape functions*), funkcjami bazowymi (*basis function*), funkcjami interpolującymi.

- Funkcja $\hat{u}$ jest tylko przybliżeniem rozwiązania dokładnego, a zatem $-\Delta\hat{u} - f = R$, R nazywa się *residuum* (*odchyk*).

Cel:
Wyznaczyć współczynniki C_i tak, aby residuum zostało 'w pewnym sensie' zminimalizowane.

Na przykład $\int_\Omega R \, d\underline{x} = 0$ nie jest dobrym pomysłem bowiem generuje tylko jedno równanie, a my potrzebujemy aż *n* równań.

Co robić?
Wprowadza się *n* funkcji wagowych w_i, *i*=1,…,*n* i wymaga się aby zachodziło

$$\int_\Omega R \ w_i \ d\underline{x} = 0 \quad \text{dla } i=1, \dots, n.$$

Jeśli jako funkcje wagowe w_i przyjmie się funkcje bazowe φ_i to otrzymuje się *metod Galerkina* (opublikowana w 1915, podobną metodę opublikował Bubnow w 1913).

$$\int_\Omega R \ \varphi_i \ d\underline{x} = 0 \quad \text{dla } i=1, \dots, n.$$

Jeśli przyjmie się $w_i = \delta(x - x_i)$, to otrzymuje się *metod kolokacji* (*collocation metod*). W metodzie kolokacji residuum znika w punktach kolokacji x_i.

Metoda Galerkina – ciąg dalszy

Rozpisuje się równania:

$$\int_\Omega R \ \varphi_i \ d\underline{x} = 0 \quad \text{dla } i=1, \dots, n.$$

poprzez:
1) zastosowanie twierdzenia Greena
2) podstawienie do równania reprezentacji $\hat{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i \ \varphi_i$

Ad 1)

Podstawiając $-\Delta\hat{u} - f = R$ do równań $\int_\Omega R\,\varphi_i\,d\underline{x} = 0$ dla i=1, …,n, otrzymuje się:

$\int_\Omega -\Delta\hat{u}\,\varphi_i\,d\underline{x} = \int_\Omega f\,\varphi_i\,d\underline{x}$, i=1, …,n, po czym pierwszy wyraz przekształca się stosując twierdzenie Greena:

Twierdzenie Greena:

$$\int_\Omega -\Delta u\;w\,d\underline{x} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\,d\underline{x} - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\cdot w\,d\gamma$$

Inaczej:

$$\int_\Omega -\nabla\cdot\nabla u\;w\,d\underline{x} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\,d\underline{x} - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\cdot w\,d\gamma$$

I jeszcze inaczej:

$$\int_\Omega -div\cdot grad\,u\;w\,d\underline{x} = \int_\Omega grad\,u\cdot grad\,w\,d\underline{x} - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\cdot w\,d\gamma$$

W przypadku jednowymiarowym stosuje się wzór na całkowanie przez części:

Całkowanie przez części:

$$\int_a^b u'\,w\,dx = -\int_a^b u\,w'\,dx + u\,w\Big|_a^b$$

Powracając do równania $\int_\Omega -\Delta\hat{u}\,\varphi_i\,d\underline{x} = \int_\Omega f\,\varphi_i\,d\underline{x}$, i=1, …,n, mamy:

$\int_\Omega \nabla\hat{u}\,\nabla\varphi_i\,d\underline{x} = \int_\Omega f\,\varphi_i\,d\underline{x} - \int_\Gamma \frac{\partial\hat{u}}{\partial n}\varphi_i\,d\gamma$, i=1, …,n. Ostatni wyraz znika, bowiem założono, że funkcje φ_i, i=1, …,n, znikają na brzegu.

Pozostaje teraz podstawić $\hat{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i\,\varphi_i$ do $\int_\Omega \nabla\hat{u}\,\nabla\varphi_i\,d\underline{x} = \int_\Omega f\,\varphi_i\,d\underline{x}$:

$$\int_\Omega \nabla(\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i\,\varphi_i)\,\nabla\varphi_i\,d\underline{x} = \int_\Omega f\varphi_i\,d\underline{x}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \int_\Omega \nabla\varphi_i\,\nabla\varphi_j\,d\underline{x} = \int_\Omega f\varphi_j\,d\underline{x} - \int_\Omega \nabla\varphi_0\,\nabla\varphi_j\,d\underline{x},\ j=1, ..., n.$$

Jest to układ równań liniowych.

Uwagi:

- Jeśli $u|_\Gamma = 0$ to ostatniego czynnika nie ma (patrz rola funkcji φ_0 w reprezentacji $\hat{u}$.
- Różny od zera warunek Dirichleta powoduje modyfikację wektora prawej strony w układzie równań.

Metoda Elementu Skończonego wyróżnia się specjalną konstrukcją przestrzeni skończenie wymiarowej V_h, w której poszukuje się rozwiązania. Obszar dzieli się na małe podobszary, zwane elementami. Przestrzeń V_h składa się z funkcji, które na poszczególnych elementach są *wielomianami ustalonego stopnia*. Wielomiany te skleja się tak, aby zachować odpowiednią regularność V_h .

Metodę Elementu Skończonego łączy się z nazwiskiem **Couranta (1942).** Po raz pierwszy wprowadził on, w celu rozwiązania eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych, podział obszaru obliczeniowego na małe trójkąty.

1950 – mechanika strukturalna
1960 – zagadnienia inżynierskie
1973 – ścisłe podstawy matematyczne (Strang i Fix)
....

Z encyklopedii Wikipedii:

Richard Courant (born January 8, 1888 in Lublinitz, **Silesia, Germany, today Poland**, died January 27, 1972 in New York/USA) was a German and American mathematician.

During his youth, his parents had to move quite often, to Glatz, Breslau, and in 1905 to Berlin. **He stayed in Breslau and entered the university there. As he found the courses not demanding enough, he continued his studies in Zürich and Göttingen**. He eventually became David Hilbert's assistant in Göttingen and obtained his doctorate there in 1910. He had to fight in World War I, but he was wounded and dismissed from the military service shortly after enlisting. He continued his research in Göttingen, with a two-year period as professor in Münster. There he founded the Mathematical Institute, which he headed as director from 1928 until 1933.

Courant left Germany in 1933, earlier than many of his colleagues. While he was classified as a Jew by the Nazis, his having served as a front-line soldier exempted him from losing his position for this particular reason at the time; however, his public membership in the social-democratic left was a reason for dismissal to which no such exemption applied [1]. After one year in Cambridge, he went to New York where he became a professor at the New York University in 1936. He was given the task of founding an institute for graduate studies in mathematics, a task which he carried out very successfully. The **Courant Institute of Mathematical Sciences** (as it was renamed in 1964) continues to be one of the most respected research centers in applied mathematics.

Apart from his outstanding organizational talent, Courant is well remembered for his mathematical achievements. He authored the very influential textbook Methods of Mathematical Physics, which is still widely used more than eighty years after it was written. He is the co-author with Herbert Robbins of a popularization titled What is Mathematics?, which is still in print. **His name is also attached to the finite element method, originally invented by engineers. Courant gave this a solid mathematical basis. This method is now the most important way to solve partial differential equations numerically.**