Równania Różniczkowe Cząstkowe (RRCz) (ang. *Partial Differential Equations*, PDE)

- **Rząd równania** jest określony rzędem najwyższej pochodnej występującej w równaniu;
- Równanie **liniowe** – wszystkie pochodne cząstkowe nie zależą od zmiennych zależnych (czyli funkcji), ale mogą zależeć od zmiennych niezależnych.
- Równanie jest **jednorodne** – bez czynnika **źródłowego** – albo **niejednorodne**, z czynnikiem źródłowym. Czynnik źródłowy nie wpływa na cechy ogólne równania ani (najczęściej) na metodę rozwiązania.

Ogólna postać liniowego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu, zdefiniowanego względem funkcji dwóch zmiennych, np. $u(x,y)$ (w zagadnieniach dynamicznych, zmienna *y* będzie zastąpiona zmienną czasu *t*) ma postać:
$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f$,
gdzie współczynniki *A, B, C, D, E, F* mogą być funkcjami *x* oraz *y*, podobnie jak funkcja wymuszająca *f=f(x,y)*. Zakłada się też, że przynajmniej jeden ze współczynników *A, B, C* jest różny od zera, bowiem w przeciwnym razie równanie byłoby równaniem pierwszego rzędu.
Wielkością służącą do określenia typu równania jest **wyróżnik**:
$\Delta(x,y) = B^2 - 4AC$,
zaś podobieństwo do wyróżnika równania kwadratowego:
$Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
nie jest przypadkowy.
Zbiór rozwiązań (*x,y*) takiego równania opisuje krzywą, przy czym krzywa ta jest:

- elipsą, gdy $\Delta > 0$
- parabolą, gdy $\Delta = 0$
- hiperbolą, gdy $\Delta < 0$.

Analogicznie do klasyfikacji krzywych przebiega klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych:

- Jeśli $\Delta(x,y) = B^2 - 4AC > 0$ to równanie nazywa się **równaniem eliptycznym**,
  Przykład: równanie Laplace'a $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Jeśli $\Delta(x,y) = 0$ to równanie nazywa się **równaniem parabolicznym**,
  Przykład: równanie przewodnictwa ciepła: $u_t - \kappa u_{xx} = 0$
- Jeśli $\Delta(x,y) < 0$ to równanie nazywa się **równaniem hiperbolicznym**.
  Przykład: równanie falowe: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

Dla ustalenia uwagi powyższe równania dotyczą funkcji dwóch zmiennych.
Powyższy podział nie jest podziałem tylko formalnym.
Równania: falowe, przewodnictwa ciepła oraz Laplace'a są przedstawicielami trzech najważniejszych klas równań różniczkowych cząstkowych. Pomiędzy tymi klasami występują fundamentalne różnice. Równania opisujące wibracje, w szczególności równanie falowe, są najczęściej hiperboliczne. Równania opisujące procesy dyfuzyjne, a do takich należy równanie przewodnictwa ciepła, są paraboliczne. Równania hiperboliczne i paraboliczne opisują procesy dynamiczne i jedna ze zmiennych jest identyfikowana z czasem. Z drugiej strony, równania opisujące stany równowagowe (*steady-state*), takie jak równania Laplace'a i Poissona, są najczęściej eliptyczne i dotyczą funkcji zależących tylko od zmiennych przestrzennych.
Równania eliptyczne występują w zagadnieniach **brzegowych**, natomiast równania paraboliczne i hiperboliczne prowadzą do zagadnień **początkowo-brzegowych**, z wymaganym jednym oraz odpowiednio dwoma, warunkami brzegowymi.

Bardzo ważne jest również to, że metody używane do przybliżonego rozwiązywania równań należących do tych trzech klas znacznie się różnią i mają zupełnie inny charakter w każdym z trzech przypadków.
O ile nazewnictwo trzech klas równań różniczkowych cząstkowych jest najbardziej 'czytelne' dla przypadku funkcji dwóch zmiennych ze względu na analogię z opisem krzywych, terminologia oraz własności przenoszą się do równań zdefiniowanych dla funkcji o większej liczbie zmiennych.
Równanie RRCz rzędu pierwszego jest **zawsze hiperboliczne**.

Klasyfikacja RRCz jest blisko powiązana z **charakterystyką** RRCz. Nie wdając się w szczegóły: w przestrzeni 2D charakterystyki są krzywymi (ogólnie: charakterystyki są hiperpowierzchniami), wzdłuż których propagowane są sygnały i informacje. Takimi sygnałami są na przykład nieciągłości pochodnych zmiennych zależnych, w szczególności fale uderzeniowe. Jeśli RRCz posiada rzeczywiste charakterystyki, to wtedy informacje propagują się wzdłuż nich. W przypadku gdy charakterystyka nie istnieje, to wtedy nie ma preferowanych dróg propagacji informacji.
Występowanie krzywych charakterystyk w dziedzinie rozwiązań prowadzi do zdefiniowania obszaru **zależności** i obszaru **wpływu** RRCz.

Rozważa się punkt $P \in D(x, y)$, gdzie $D(x, y)$ dziedzina rozwiązań.
Obszar zależności punktu *P* to taki obszar w $D(x, y)$, od którego zależne jest rozwiązanie w *P*, oznaczone F_P. Inaczej: F_P zależy od wszystkiego co zaszło (zachodzi) w obszarze zależności.
Obszar wpływu punktu *P* to taki obszar w $D(x, y)$, na rozwiązanie w którym wywiera wpływ rozwiązanie w punkcie *P*. Inaczej: F_P wpływa na rozwiązanie we wszystkich punktach należących do obszaru wpływu.

- Równania eliptyczne nie posiadają charakterystyk, zaś obszar zależności i obszar wpływu pokrywają się i obejmują całą dziedzinę rozwiązania $D(x, y)$. Nie ma propagacji nieciągłości; rozwiązania są ciągłe i łagodne, bowiem operatory eliptyczne mają własności wygładzające. W każdym punkcie brzegu obszaru musi być zadany warunek brzegowy.
  Rozwiązanie przybliżone musi być wyznaczone we wszystkich punktach jednocześnie.

Rys.

- Dla równań parabolicznych charakterystykami są linie stałego czasu. W konsekwencji stan w punkcie P w chwili czasowej t zależy od wartości rozwiązań we wszystkich poprzedzających t chwilach czasowych oraz od tego co dzieje się w chwili bieżącej. Jest to obszar zależności. Jest to obszar skończony.
  Obszarem wpływu natomiast są wartości rozwiązań we wszystkich punktach w chwili bieżącej oraz w kolejnych chwilach czasowych. Obszar wpływu jest nieskończony.
  Rozwiązanie zagadnienia parabolicznego musi spełniać warunek początkowy zdefiniowany dla początkowej chwili czasowej (w której następuje start symulacji) oraz warunki brzegowe określone w każdym punkcie brzegu przestrzennego w każdej chwili czasowej.
  Rozwiązanie przybliżone jest wyznaczane dla kolejnych chwil czasowych.

Rys.

- W przypadku hiperbolicznym propagacja informacji następuje po krzywych charakterystyk i ma to zasadniczy wpływ na kształt obszarów zależności i wpływu.

Rys.

Najprostszym przypadkiem równania hiperbolicznego jest równanie adwekcji:

$u_t + au_x = 0$,
w którym a oznacza prędkość adwekcji.

Uwaga: ponieważ współczynniki równania *A, B, C* mogą zmieniać się w zależności od położenia, to również typ równania może ulegać zmianie.