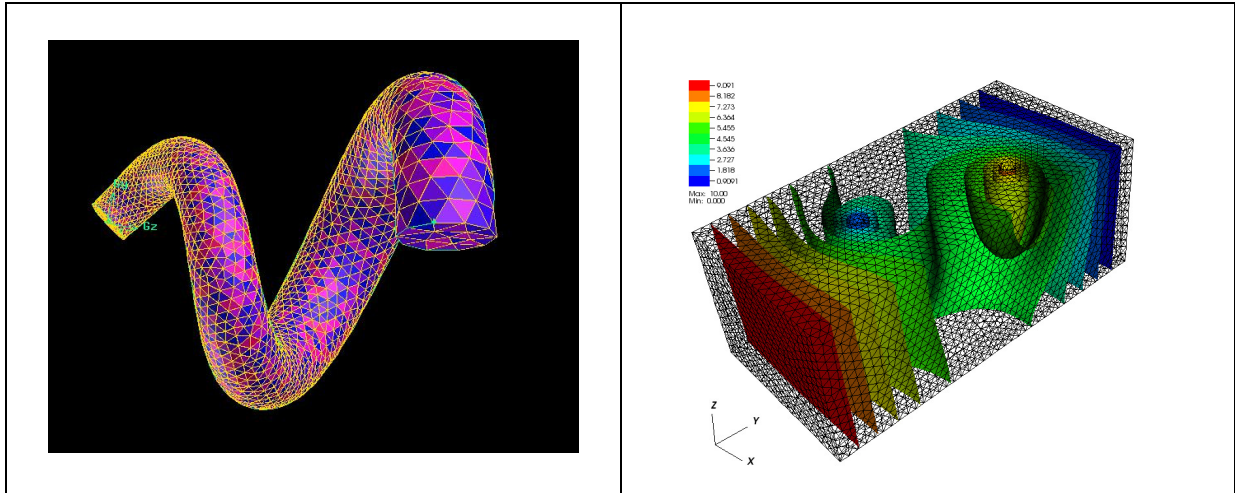


# Metoda elementu skończonego

Anna Trykozko, ICM

[www.icm.edu.pl/~aniat/fem](http://www.icm.edu.pl/~aniat/fem)



- Rozwiązywane jest równanie Poissona

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

## Operator Laplace'a:

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Za pomocą tego równania można opisywać wiele zjawisk:

- Przesunięcie membrany spowodowane pionowym wymuszeniem,
- Zagadnienia z zakresu elektrostatyki: wtedy  $u$  oznacza potencjał,
- Przewodnictwo ciepła – rozkład temperatury,
- Przepływ wód podziemnych
- .....

Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych

- Różnice skończone
- Objętości skończone
- Metoda elementu skończonego (ang. *Finite Element Method*)

Kilka nazwisk:  
Ritz (1908)  
Galerkin (1915)  
Courant (1943)  
.....

### Metoda ważonych reszduów – w stronę metody Galerkina

Jest wiele sposobów dojścia do sformułowania *metody Galerkina*; jeden z nich to *metoda ważonych reszduów* (*Method of Weighted Residuals*).

#### Idea:

Dla prostoty w dalszym ciągu ograniczymy się do przypadku jednowymiarowego:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f \text{ w } \Omega = (a, b)$$
$$u(a) = u(b) = 0$$

- Poszukujemy rozwiązania przybliżonego  $\hat{u}$ , korzystając z reprezentacji w postaci kombinacji liniowej:

$$\hat{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i,$$

gdzie funkcje  $\varphi_i$  są **liniowo niezależne i na brzegu przyjmują wartość 0**. Funkcja  $\varphi_0$  odpowiada za spełnienie niezerowego warunku brzegowego (w naszym przypadku  $\varphi_0 = 0$ ). Funkcje  $\varphi_i$  nazywa się funkcjami kształtu (*shape functions*), funkcjami bazowymi (*basis function*), funkcjami interpolującymi. Funkcje  $\varphi_i$  są zadane i należy je traktować jako **znane funkcje**. Sposób konstrukcji charakterystyczny dla metody elementu skończonego zostanie podany później.

- Funkcja  $\hat{u}$  jest tylko przybliżeniem rozwiązania dokładnego, a zatem  $-\Delta \hat{u} - f = R$ ,  **$R$  nazywa się residuum (odchyłką)**.

#### Cel:

Wyznaczyć współczynniki  $\alpha_i$  tak, aby residuum zostało ‘w pewnym sensie’ zminimalizowane.

#### Co robić?

Wprowadza się **funkcje wagowe**  $\omega$ , zerujące się na brzegu, i wymaga się aby  $\forall \omega$  zachodziło

$$\int_{\Omega} R \omega \, dx = 0$$

**Jeśli jako funkcje wagowe  $\omega$  przyjmie się funkcje bazowe  $\varphi_i$  to otrzymuje się metodę Galerkina** (opublikowana w 1915, podobną metodę opublikował Bubnow w 1913).

$$\int_{\Omega} R \varphi_i \, dx = 0 \text{ dla } i=1, \dots, n.$$

A przy okazji...

Jeśli przyjmie się  $\omega = \delta(x - x_i)$ , to otrzymuje się **metodę kolokacji** (*collocation method*).  
W metodzie kolokacji residuum znika w punktach kolokacji  $x_i$ .

### Metoda Galerkina – ciąg dalszy

Sprawy do wyjaśnienia:

- Jak definiować funkcje bazowe? – to na później...
- Pojawiła się całka... co z tego wynika?

Przekształca się równanie:

$$\int_{\Omega} R \omega \, dx = 0$$

poprzez:

- Podstawienie  $R = -\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - f$  :

Otrzymuje się:

$$\int_{\Omega} -\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} \omega \, dx = \int_{\Omega} f \omega \, dx$$

- Pierwszy człon przekształca się korzystając ze wzoru na **całkowanie przez części** (będącego jednowymiarowym odpowiednikiem twierdzenia Greena):

Całkowanie przez części:

$$\int_a^b u' w \, dx = -\int_a^b u w' \, dx + u w \Big|_a^b$$

Otrzymuje się kolejno:

$$\int_{\Omega} -\frac{d}{dx} \left( \frac{d\hat{u}}{dx} \right) \omega \, dx = \int_{\Omega} f \omega \, dx$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{d\hat{u}}{dx} \right) \frac{d\omega}{dx} \, dx - \frac{d\hat{u}}{dx} \omega \Big|_a^b = \int_{\Omega} f \omega \, dx$$

**jedna pochodna ‘przeskoczyła’ oraz  
pojawił się nowy składnik**

$$\int_{\Omega} \left( \frac{d\hat{u}}{dx} \right) \frac{d\omega}{dx} \, dx = \int_{\Omega} f \omega \, dx$$

**składnik brzegowy jest równy zeru**

W ten sposób otrzymaliśmy **słabe sformułowanie** oryginalnego zagadnienia:

Znaleźć  $\hat{u}$  taką, że  $\forall \omega$  (zerującej się na brzegu) zachodzi:

$$\int_a^b \frac{d\hat{u}}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} dx = \int_a^b f \cdot \omega dx$$

Znaleźć  $u_h \in H_{0h}^1((0, 1))$  taką, że  $\forall \omega \in H_{0h}^1((0, 1))$  zachodzi

$$\int_a^b \frac{du_h}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} dx = \int_a^b f \cdot \omega dx$$

• Podstawienie do słabego sformułowania reprezentacji  $\hat{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$  oraz ...

• podjęcie decyzji co do ustalenia funkcji  $\omega$ :

Jako testowe funkcje  $\omega$  wybiera się  $n$  funkcji  $\varphi_i$  wykorzystanych w reprezentacji

$\hat{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ . Czyli mamy  **$n$  niewiadomych współczynników i  $n$  równań!**

$$\int_a^b \frac{d\hat{u}}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} dx = \int_a^b f \cdot \omega dx$$

$$\int_a^b \frac{d(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i)}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx = \int_a^b f \cdot \varphi_j dx, \quad j=1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx = \int_a^b f \cdot \varphi_j dx, \quad j=1, \dots, n.$$

Jest to **układ równań liniowych**.

#### Uwagi:

Różny od zera warunek Dirichleta powoduje modyfikację wektora prawej strony w układzie równań.

Uwzględnienie innych rodzajów warunków brzegowych.

Metoda Elementu Skończonego wyróżnia się specjalną konstrukcją przestrzeni skończenie wymiarowej  $V_h$ , w której poszukuje się rozwiązania. Obszar dzieli się na małe podobszary, zwane **elementami**. Przestrzeń  $V_h$  składa się z funkcji, które na poszczególnych elementach są *wielomianami ustalonego stopnia*. Wielomiany te **skleja** się tak, aby zachować odpowiednią regularność  $V_h$ .

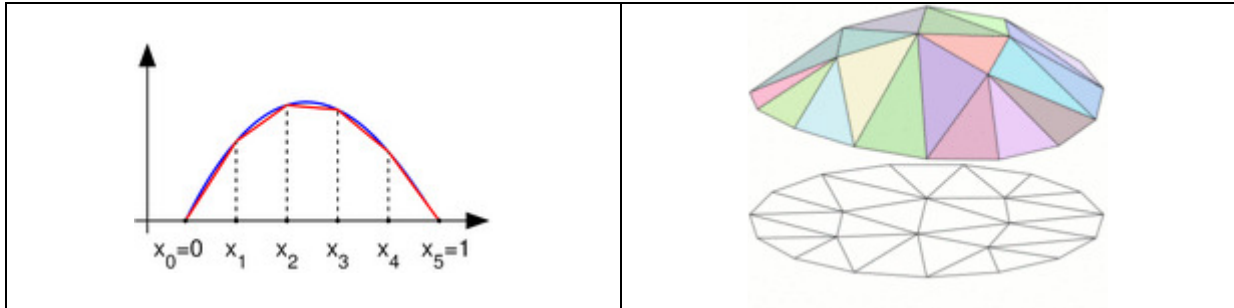
**Na przykład:**

W przypadku jednowymiarowym obszar (=odcinek) dzieli się na podprzedziały.

Jako bazę wybiera się funkcje  $\varphi_i$  **ciągłe, kawałkami** (na elemencie) **liniowe** i takie, że

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \text{ gdzie } x_j \text{ oznacza punkty węzłowe dyskretyzacji.}$$

Funkcje te często nazywa się **funkcjami kapeluszowymi** (*hat functions*).

**Metoda elementu skończonego – Kroki - Podsumowanie:**

- Sformułowanie wariacyjne (słabe). Przy odpowiednich założeniach zagadnienie oryginalne i sformułowanie oryginalne są równoważne.
- Wyznaczanie rozwiązania przybliżonego  $\hat{u}$  należącego do przestrzeni skończonej wymiarowej. Zatem  $\hat{u}$  może być reprezentowana jako **liniowa kombinacja** funkcji bazowych tej przestrzeni.
- Zastosowanie w słabym sformułowaniu jako funkcji wagowych funkcji bazowych pozwala wygenerować układ równań algebraicznych i znaleźć przybliżone rozwiązanie.
- Szczególna konstrukcja przestrzeni, do której należy  $\hat{u}$ , dyskretyzacja.

**Przykład**

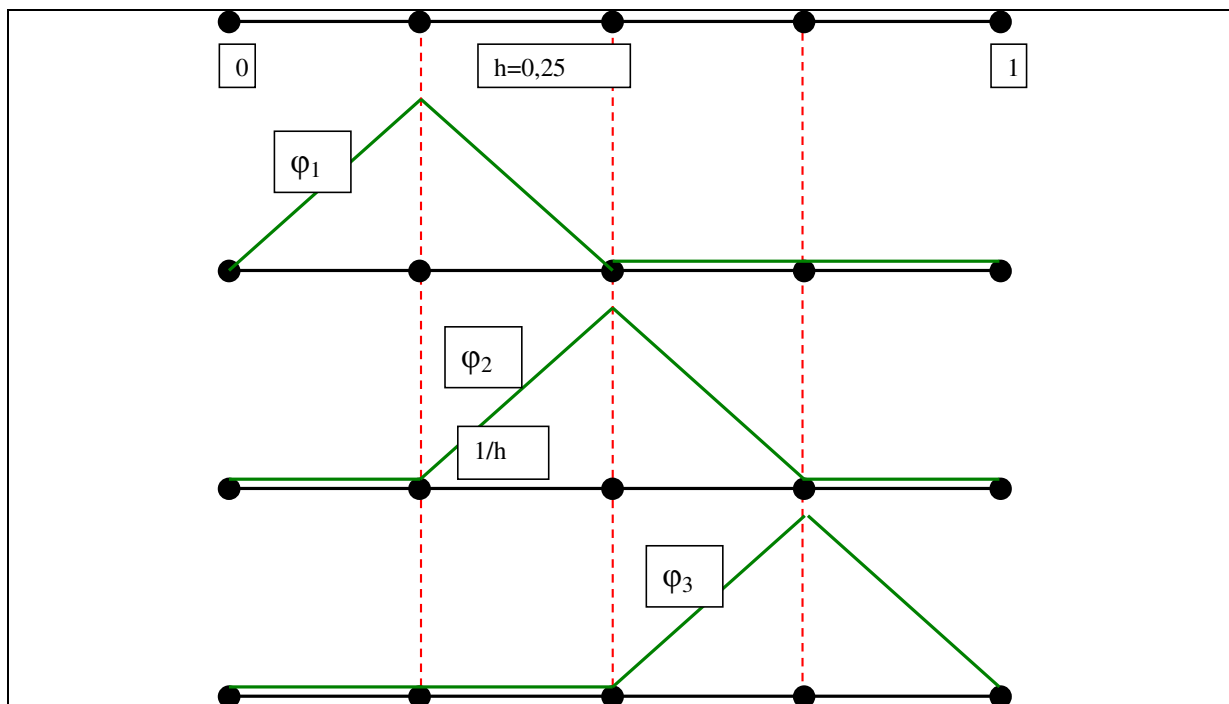
Poszukuje się rozwiązania zagadnienia:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 10 \text{ w } (0, 1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Dokładne rozwiązanie tego zagadnienia to  $u(x) = -5x^2 + 5x$ .

Rozwiązanie dyskretne ‘rozepniemy’ na dyskretyzacji złożonej z czterech elementów (o równej długości).



Słabe sformułowanie:

Znaleźć  $\hat{u} \in H_{0h}^1((0, 1))$  taką, że  $\forall \omega \in H_{0h}^1((0, 1))$  zachodzi

$$\int_0^1 \frac{d\hat{u}}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} dx = \int_0^1 10 \cdot \omega dx$$

Rozwiązanie przybliżone jest wyrażone w postaci kombinacji liniowej:

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot \varphi_i$$

Po podstawieniu do słabego sformułowania otrzymuje się układ trzech równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} & \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} & \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} & \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} & \dots \\ \dots & \dots & \int_0^1 \frac{d\varphi_3}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 10 \cdot \varphi_1 \\ \int_0^1 10 \cdot \varphi_2 \\ \int_0^1 10 \cdot \varphi_3 \end{bmatrix},$$

skrótowo oznaczany jako  $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}$

Zauważmy, że:

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} dx = \int_0^h \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} dx + \int_h^1 \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) dx = 2h \frac{1}{h^2} = \frac{2}{h},$$

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} dx = \int_h^{2h} \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot \frac{1}{h} dx = h \left(-\frac{1}{h^2}\right) = -\frac{1}{h}$$

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \cdot \frac{d\varphi_3}{dx} dx = 0$$

W ogólności zachodzi:

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx = \begin{cases} 2/h, & i = j \\ -1/h, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| > 1 \end{cases} \quad B_i = \int_0^1 10 \cdot \varphi_i dx = 10 \cdot h$$

**Ważne:** Kiedy elementy macierzy układu równań mają wartość **zero**?

Macierze powstające w toku realizacji metody elementu skończonego są **rzadkie** (*sparse*), tzn. duża liczba ich elementów ma wartość zero.

Arkusz Excela – podział obszaru obliczeniowego na 4 elementy ( $h=0,25$ )

									4 elements
0,25						0			0
8	-4	0			2,5	0,25			0,9375
-4	8	-4			2,5	0,5			1,25
0	-4	8			2,5	0,75			0,9375
						1			0

Podział obszaru obliczeniowego na 10 elementów ( $h=0,1$ )

0,1									
20	-10	0	0	0	0	0	0	0	0
-10	20	-10	0	0	0	0	0	0	0
0	-10	20	-10	0	0	0	0	0	0
0	0	-10	20	-10	0	0	0	0	0
0	0	0	-10	20	-10	0	0	0	0
0	0	0	0	-10	20	-10	0	0	0
0	0	0	0	0	-10	20	-10	0	0
0	0	0	0	0	0	-10	20	-10	0
0	0	0	0	0	0	0	-10	20	-10
0	0	0	0	0	0	0	0	-10	20



### Co dalej:

- Inne warunki brzegowe
- Inne wielomiany aproksymujące (P2, P3 – a może jeszcze coś innego)? Co uzyskuje się stosując wielomiany wyższego stopnia i za jaką cenę? Elementy Lagrange'a i elementy Hermite'a.
- Zagadnienia w obszarach dwu- i trójwymiarowych. Sformułowanie pozostaje bez zmian, ale.... trudniej.

